

T-093





کلیات علوم و فنون ریاضیه دن

ص ۹۰



# در رد پنجم جزو هندسه مجتبه

مکاتب اعدادیه شاهانه ایکنجی سنه لینه مخصوص اولوق اوزره  
ترتیب ایدلشدور



مکتاب هریه شاهانه درسد ناظری ارطامه هریه میرالایی بانی

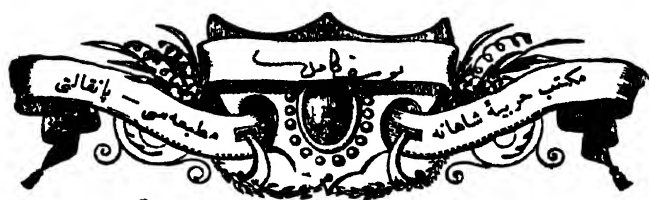
مجله ایستاد

مجلس معارف عسکری طرفندن بالتدقی کلیاته قبول و ادخال اولنشدور

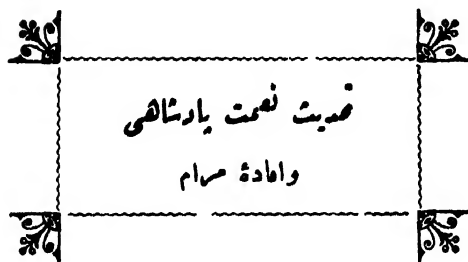


طبع اول

استانبول — ۱۳۱۶ شباط



# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



مکون کائنات تعالیٰ شانہ حضرت تری ولی نعمت یمتیز ولی  
نعمت جهان ، شهنشاه معظم و خلیفۃ رسول اللہ فی العالم ، پادشاہمز  
باش قوماندان اقدسمز ، السلطان ابن السلطان السلطان ﴿ الغازی  
عبد الحمید خان ثانی ﴾ افندمز حضرت تریخی الی اخرالدوران  
کمال صحت وعافیتله اریکہ پیرای شوکت و شان بیورسون آمین ۔

المانيا مكاتب اعداديه سنده اوقوتديريلان. ووه لهرة نام ذاتك تاليفكرده سي  
 اولان و مباحث رياضيه، لك هندسه مسطحه قسمي بوندن اقدم سايه مهارفوايه  
 حضرت خلافتپناهيده ترجمه ايلمش و مكاتب اعداديه شاهانه برنجي سنه لرنده  
 تدريس ايدلك اوزره نشرينه موفقي اولمش ايدم. مباحث مذكوره لك  
 هندسه مجسمه قسمي، مسطحه قسمي و مكاتب اعداديه شاهانه شاگرداني  
 ايجون لزوملي كوريلان و اساس پروغرامنه توافقي ايدن دعاوي و مسائلي  
 حاوي اوله رق ۷۲ درسه، قاعده تكرر اوزره، اوقوتديريله بيله جك درجه ده  
 بولمش اولمائه بمنه الكريم لك دخي ترجمه سنه بالابتدار عصر كمالات حصر  
 حضرت تاجداريده زيور دستكاه انتشار اولان آثار جديده به ضميمه  
 عاجزاهم اولمق اوزره نشرينه اجتسار ايلدم.

والله ولي التوفيق



## ﴿ اخطار ﴾

هر فصلك و بابك هایتیه یازیلان وظائف و مسائلدن ایجابی قدری معلمین کرام طرفدن درسك نهایتنه طوغری شاگردانه ویریه جکدر . متعدد شاگردانه عینی ر وظیفه ویا مسئله ویرلش اولماق ایچون وظائف و مسائلده بولان اعداد و ارقام دیکشیدیریه رک هر شاگرد ایچون باشقه باشقه اولماید.

شاگردان، مذاکره ویا بوش زمانلرنده ، کندیلرینه ویریلان مسائل و وظائفی تحریراً حاضرلیوب مذکور وظائف و مسائله مخصوص اولان درس زمانلرنده خواجهلرینه تقدیم ایده جکدر . معلم افسدیلر او درسلا ائساننده کیف ما اتفق شاگرد قالدیره رق اشبو شاگردانه ، تحریراً حل ایتدکاری وظیفه لری ویا مسئله لری بر کره دها نخته باشنده ارقداش لرینک مواجهه سنده حل ایتدیره جکدر و متباقینسك مسائل و وظائفی تصحیحات مقتضیه اجرا سندن صوکره صاحب لرینه اعاده ایلیه جکدر .

هر حالده تعریفاتی، شکللر ترسیم و مختلف مثاللر ابرادیه شاگردانک ذهننه القایه و هر دعوی و مسئله نك ایلریده نیه یارایه جفی و جهت تطبیقینی انلره کوزلجه تفهیمه همت ایده جکدر .

شاگردانک مسئول اوله جفی مواد، کتابک نهایتنده کی فهرست ایله ، بعضینسك ایام مبارکه یه تصادف ایتمی احتماله قارشو احتیاطاً، التمش سکز درسه تقسیم اولنمشدر . هر درسه اصابت ایدن مقدارک تقریری اکثریا بر درس مدتدن اول ختام بولش اوله جقدر . بناء علیه بوندن بالاستفاده درس بر دها تقریر ایدیه جکدر . اکرینه وقت قایلرسه تعلیماته توفیقاً



تختیه هر هانکی بر شاگرد جلب ایدیله زك اولکی درس لر استجواب اولنه -  
بقدره مذکور التمش سکنز درس تماماً کورلدکن صوکره درس کسینه دهه  
وقت وار ایسه یکمش درس لر تکرار ایدیله جک ویا مسائل حل ایله اشتغال  
اولنه بقدره .

ریاضیه نك تحصیل بر چوق امثله و مسائلک حلیه ممکن اولدیفندن هر  
معلم افندی وقت و فرصت بولدقجه شسا کردانه، بو کتابده مندرج اولمیان  
سائر وظائف و مسائل دخی حل ایتدیرمکه غیرت ایلملیدر .



## برنجي فصل

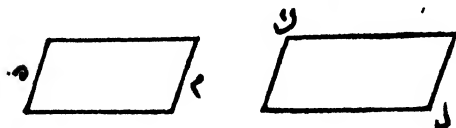
مستويبرك و مستقيمبرك به مجردده اوضاع مختلفه

( ۱ ) §

معلومات ابتدائية

- (۱) — بر مستويبرك ايكي نقطه سي يئنه وصل اولنان مستقيم } § . ۱  
 ۱ ، (۲۲) } تماماً مستوي مذكوره منطبق بولنور. بوسيدندركه :  
 (۲) : بر مستوي به منطبق و موازي اوليان بر مستقيم مستوي  
 مذكوري بالكز بر نقطه ده قطع ايلر. اشبو نقطه به «موقع مستقيم» ديلنور .  
 (۳) : هيچ بر نقطه سنده مستوي بي قطع ايلميان مستقيم «مستوي به

موازي، اولور .



- (۴) : مستويلر، مستقيمابر  
 مثللو غير محدوددر. فقط صورت  
 افاده بي اختصار و تسهيل ايچون  
 مستويلر متوازي الاضلاع لر طر.  
 زنده ارائه و (شکل ۱ — )



شکل ۱

«م ۳» و يا ۱ و يا خودك ل مستوي سي ،  
 ديه افاده اولنور .



شکل ۲

- (۵) : بر مستوي، بر مستقيم اوزرنده  
 بولميان اوج نقطه واسطه سيله تماماً ممين

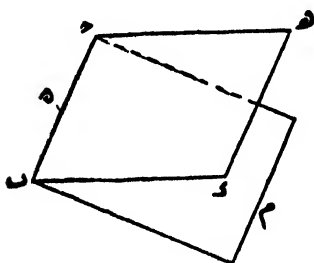
اولور. چونکه (شکل — ۲) مذکور اوج نقطه‌نك ايکسندن ومثلاً (ب، ۶) دن کچن ب ۶ مستقیمندن بر مستوی اصرار ومستقیم، محور اولوق اوزره مذکور مستوی تدویر ایدلسه دور ائناسنده اوجنجی و نقطه‌سنه تقرب ایدوب نهایت مذکور نقطه‌دن کچر و دوره دوام ایدلیدی تقدیرده نقطه مذکوره‌دن در عقب آریلوب یالکز بر وضعیتده و نقطه‌سنی حاوی بولنور. دیمککه اوج نقطه‌دن یالکز بر مستوی کچر. اشبو اوج نقطه معلوم اولورسه مستوی دخی معلوم ومعین اواش اولور. بوکا استناداً هر قفی بر مستوی :

اولاً — بر مستقیم ایله بونک خارجنده واقع بر نقطه،

ثانیاً — یکدیگری قطع ایدن ایکی مستقیم،

ثالثاً — بر مثلث،

رابعاً — ایکی موازی مستقیم { ۸ § . ۵ } عینی بر مستوی اوزرنده بولندیغندن مستقیمین متوازیین اعانه‌سیله دخی معین اولور .



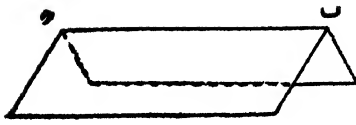
شکل ۳

(۶) : (شکل — ۳) ایکی موازی ب ۶،  
 ه مستقیمینک بریسنندن و مثلاً ب ۶  
 مستقیمندن کچن (م ۵) مستویسی، مذکور  
 مستقیمین متوازیینک (ب ۵) مستویسنه  
 منطبق اولمز ایسه، دیگر ه مستقیمه  
 و بالعکس هر قفی بر ه مستیمی (م ۵)  
 مستویسی داخلنده بولنان بر ب ۶ مستیمه

موازی اولسه (م ۵) مستویسنه دخی موازی اولور: چونکه موازی اولسه موازی اولان مستقیملرک دخی یکدیگری قطع ایتیمی لازم کلیرکه خلاف حقیقتدر .

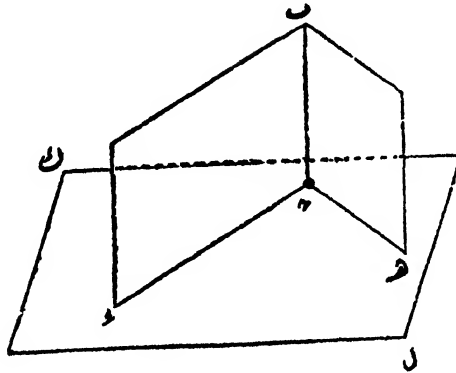
(۷) : الی غیرالهایه استقامت مخرجه‌لرنده یکدیگری قطع ایتیمان مستویلر

« موازی ، اولور .



شکل ۴

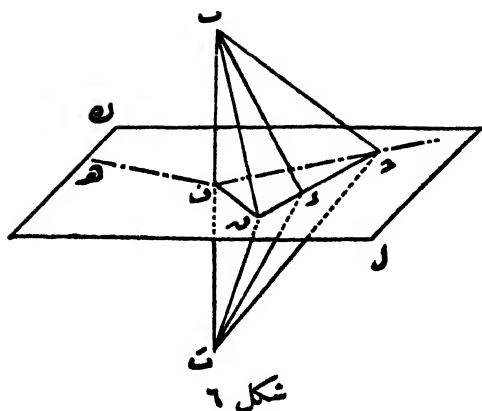
(۸): ایکی مستوی، موازی اواز  
ایسه یکدیگری بر مستقیم استقامتده قطع  
ایدره. یعنی فصل مشترکری (شکل — ۴)



شکل ۵

بر مستقیم اولور. فی الحقیقه فصل مشترکرنده، بر مستقیم اوزرنده اولیان اوج  
نقطه بولقی ممکن اولسه بو اوج نقطه دن {۵} یالکز بر مستوی کچه جکندن  
مقاطع فرض ایدلش اولان ایکی مستوینک یکدیگریه منطبق اولسی اقتضا  
ایدره.

(۹): یکدیگری قطع ایدن اوج مستوینک فصل مشترکی بر نقطه  
اولور. (شکل — ۵) فی الواقع هر ایکی مستوینک فصل مشترکی {۸}  
بر مستقیم اولوب بو مستقیمک پهری اوجنچی مستوی بی {۲} یالکز بر  
نقطه ده قطع ایدره. بو حواله مذکور اوج مستوی اوزرنده مشترک یالکز  
نقطه سی بولنور.



دعوی : ( شکل — ۶ )  
 ب، ت مثلثات ابکی نقطه دن  
 ابعاد متساویه ده بولان نقاطک  
 محل هندسی بر مستویدر .

اثباتی: ب، ت محک اوزرنده  
 واقع ابکی نقطه اولسون .  
 اشبو ابکی نقطه یینی وصل  
 ومستقیم موصول اوزرنده کیف

ما اتفق بر نقطه سی اخذ ایدم . بر موجب فرضیات  $ب = ت$  ،  
 $ب = ت$  اولوب  $ح = ح$  یعنی هر ابکی مناشده مشترک اولد .  
 یقیندن { § ۲۶ . ۵ }  $ب = ت$  اولمغله :  $ح = ح$  و بنا علییه { § ۲۰ . ۵ }  $ب = ت$  بولوب بوحالده  $ب = ت$  اوله جفتدن نقطه سی و بوسیدن  $ح$  مستقیم محل هندسی مفروضک اوزرنده بولور . ایشنه محک هر ابکی نقطه سی آره سنه موصول کافه مستقیملر تماماً محل مذکور اوزرنده بولنجفی بوجهله تحقق ایندیکنندن مثلاً  $ب، ت$  و مستقیمین متلاقینندن بکن مستویک هر نقطه سی دخی محل مذکور اوزرنده بولدنفی آکلاشیلور . یعنی محل هندسی مفروض بو مستویدن عبارت اولمش اولور .

دعوی : ( شکل — ۶ ) بر مستقیمک بر ی نقطه سنده کندینسه عمود

اولان و ح و و و و و ..... الخ مستقیملرینک محل هندسی بر مستوی اولور .

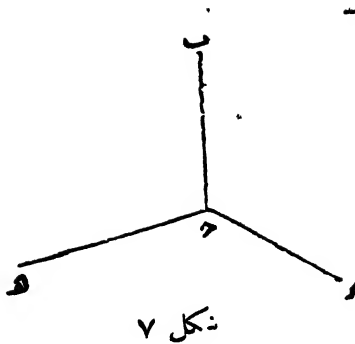
اثباتی : و نقطهسندن اعتباراً ب ت مستیمی اوزرنده ب و = و ت قطع و محك هر قنی بر و نقطهسی ب ، ب نقطه لرینه وصل اولندقده و ب و ، و ت و مثلث قائم الزاویه لرینك { ۲۰ § ۵ ، تنیه } مساواتندن ب و = و ت اولوب بونكله دعواض { ۲ § } به رجوع ایدرك اكا عطفأ محل هندسی مفروضك بر مستویدن عبارت اولهجنی آكلاشیامش اولور .

تعریف : بر مستقیمك بر نقطهسی اطرافده مستقیم مذكوره اقامه اولیان عمودلرك كافهسنی محتوی اولان مستوی به مستقیم معلومك مستوی قائمی ، تمیز اولور . بر مستوی اوزرنده واقع اولان و بر نقطهده تلاق ایدن مستقیملرك اشبو تلاق نقطهسندده مذکور مستقیملرك كافهسنه قائماً موضوع اولان مستقیم ، مستوینك بر «ناظمی» و یا «عمودی» اولور . بو عمودك مستوی بی قطع ایلدیكى نقطه به «موقع عمود» دینلور .

### نتایج

۱) : بر مستوینك اوزرنده واقع مستقیمین متلاقینك نقطه تلاقیسندده مذکور مستقیملره عمود اولان مستقیم موقع عموددن بكن و مستوینك اوزرنده بولنان بالجله مستقیملره و بناءً علیه مستوی به دخی عمود اولور .

۲) : بر مستوی به عمود اولان مستقیم ، موقضدن بکوب مستوی اوزرنده بولنان بالجله مستقیملره دخی عمود اولور .



شکل ۷

۳): بر مستویك اوزرنده و یا خار-  
جنده واقع بر نقطه دن مستوی  
مذ کوره یا لکز بر عمود اقامه  
و یا تنزیل اولنور و بالعکس بر  
مستقیمك اوزرنده و یا خارجنده  
بولان بر نقطه دن مستقیم مذ کوره  
یا لکز بر مستوی قائم کچیریلور.

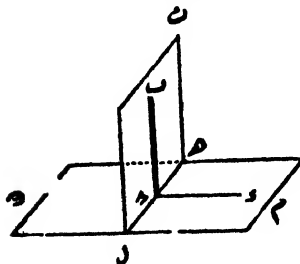
( § ۴ )

مسئله : ( شکل — ۷ ) بر ب ح مستقیمك بر ح نقطه سنده مستقیم  
مذ کورك مستوی قائمی رسم ایتمك مطلوبدر .

صورت حل : ب ح مستقیمدن کیف ما اتفق ایکی مستوی کچیریلوب  
اشبو مستویلر داخلده بولمق اوزره ح نقطه سندن مستقیم معلومه ایکی  
ح د ح عمودینك اقامه سی کافیدر . چونکه بوا یکی عموددن کچن مستوی  
{ § ۳ ، نتیجه (۱) } مطلوب اولان مستویدن عبارت اولور .  
( § ۵ )

مسئله : ( شکل — ۸ ) ر (م) مستویسی اوزرنده واقع هر ها نیکی  
بر ح نقطه سندن مستوی مذ کوره بر عمود اقامه ایتمك مطلوبدر .

صورت حل : اولاً ، معلوم اولان ح نقطه سندن مستوی اوزرنده کیف



شکل ۸

ما اتفق بر ح د مستیمی آلنور . ثانیاً ، نقطه  
مذ کورده د ح مستقیمك مسئله سابقه به توفیقاً  
(کل) مستوی قائمی رسم ایکیلور . ثالثاً ، بینه  
مذ کور نقطه دن مستوی قائم ایله مستوی  
معلومك ل ه فصل مشترکته و مستوی قائم  
داخاند ه ح عمودی اقامه اولنور . ایشته  
اشبو ح ب عمودی مستوی معلومك ایکی

مستقیمه [ بری مستوی قائم ایله مستوی معلومك فصل مشترک اولان  
ل ه، دیگرى مستوی قائمك ترسیمنه یارایان ح، مستقیم مفروضی ]  
عمود بولندی ایچون { § ۳، نتیجه ۱ } مستوی به دخی عمود اولور .

( § ۱۰۵ )

مسئله : ( شکل — ۷ ) بر ح مستقیمك خارجنده واقع بر ه نقطه .  
سندن مستقیم مدکوره بر مستوی قائم رسم ایتمك مطلوبدر .  
صورت حلّی : ه نقطه سندن بر مستقیمه ه عمودی تنزیل و ح  
موقع عمودندن ، باشقه بر مستوی داخلنده ه عمودینی اقامه ایتمك کافیدر .  
ه ح ه مستقیملرندن کچن مستوی { § ۳، نتیجه ۳ } مطلوب اولان  
مستویدن عبارت اولور .

( § ۶ )

دعوی : عینی بر مستوی به عمود اولان مستقیملر یکدیگرینه موازی  
اولور .

اثباتی : ( شکل — ۹ ) مثلاً م، م، مستقیملری (ك ل) مستویسناك  
ایکی عمودندن عبارت اولسون . م، م، عینی وصل، ه ح م م رسم ،  
ح م ه قطع ایکیلور وشکلک اقسام سائرهمی اکمل اولنورسه :  
ه م م م م م { § ۲۰، نتیجه } اولدیغندن ه م ه

$$\Delta M M \approx M M \quad , \quad , \quad , \quad M M = M M ,$$

$$\Delta M M \approx M M \quad , \quad , \quad , \quad M M = M M ,$$

اولهجنی عینی م، م، ب، ب، نقطه لرینك هربری ه، ه نقطه لرندن ابعاد هتسا .





خلاف حقیقتدر . بناء علیه بر مستقیمه عمود اولان مستویلر متلاق اولیوب  
یکدیگرینه موازی اولور .

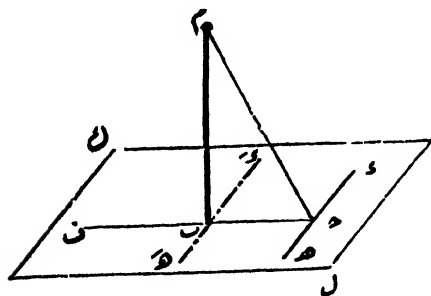
### ( ۸ §

مسئله : ( شکل — ۱۰ ) بر ( ك ل ) مستویسنك خارجنده واقع بر

م نقطهسندن بر عمود تنزیل ایتك .

صورت حلی : ك ل مستویسی اوزرنده کیف ما اتفاق بر د مستیمی

اخذ ، م نقطهسندن م ح ل د ه ، ح نقطهسندن و ح ل د ه رسم  
اولدقدن صوكره م نقطهسندن و ح مستقیمه تنزیل اولان م ب عمودی



شكل ۱۰

مطلوب اولان عموددن عبارت  
اولور . چونكه ب نقطهسندن  
ك ل مستویسی داخلنده ب د و  
رسم اولدقدن ح د مستیمی  
{ ۳ § ، نتیجه ۱ } م ح ب مستویسنه  
عمود اولدیفندن { ۷ § ب د دخی  
مذكور مستوییه و بناء علیه ب م  
مستقیمنده عمود اولور . ایمدی م ب

مستیمی ك ل مستویسی داخلنده واقع ح و ب د مستقیملرینه عمود  
اولدیفندن اشبو ك ل مستویسنه دخی { ۳ § ، نتیجه ۱ } عمود اولمش اولور .

### ( ۱۰ § ۸

دعوی : « اوج عمود دعواسی » ( شکل — ۱۰ ) هر قننی بر ك ل

مستویسنك خارجنده واقع بر م نقطهسندن تنزیل اولان م ب عمودینك  
ب موقعندن مستوی اوزرنده واقع هر قننی بر د ه مستقیمه بر عمود اقامه

ایدیلور و (ح) موقع عمودیه م بینی و ضل اولنورسه م ح مستقیم موصولی  
 ع ه مستقیمه عمود اولور.

اثباتی: ب ک || ح ع رسم ایدلکده م ب  $\perp$  ب ع، ب ح اولد .  
 یغندن ب ع مستیمی { ۳ § ، نتیجه ۱ } م ب ح مستویسنه عمود اولغله  
 بوکا موازی اولان ح ع مستیمی دخی { ۷ § } مستوی مذکوره  
 و { ۳ § ، نتیجه ۲ } موقعندن کچن ح م مستیمه دخی عمود اولش  
 اولور.

اخطار: بر نقطه دن بر مستوی به تنزیل اولان عمود نقطه مذکوره  
 ایله مستوی آره سنده موجود اولان مسافه لرك ، تعیر دیگرله نقطه مذکو .  
 ردهن کچن مستقیم مائللرك اقصری [ (شکل — ۱۰) م ب > م ح ] اولدینی  
 آشکار اولوب عمود مذکوره نقطه نك مستوی به اولان «بعدی» تسمیه  
 اولور .

### ( ۹ §

دعوی: ایکی مستقیمدن هر بری اوچنجی بر مستقیمه موازی اولورسه  
 کندیلری دخی یکدیگریه موازی اولور .

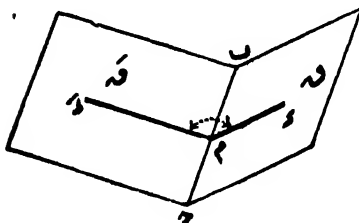
اثباتی: اوچنجی مستقیمك مستوی قائمی رسم اولندقدده { ۷ § }  
 مذکور ایکی مستقیمدن هر بری دخی اشبو مستوی قائمه عمود اوله جفندن  
 { ۶ § } یکدیگریه موازی اولور .

### ( ۱۰ §

دعوی: بمد مجردده ضلعلری نظیر نظیره موازی اولان زاویه لر بر برینه



(۲): ضلع مجسمك هر قنفي بر نقطه سندن وجهلره رسم اولنان ناظمك آره سنده كي زاويه ناظمك بری داخله، ديكری خارجه طوهری اولدينه نظراً مقياس زاويه سنه مساوی و هرايکسي برجهته بولندينه کوره مقياس زاويه سنك متممی اولدینی آز ملاحظه ابله آکلاشیلور .



شکل ۱۲

(۳): مستویین زاویه سی ضلع مجسميله [ و مثلاً (شکل - ۱۲) ب<sup>ق</sup> طرزنده ] اراه اولنور. اکر ضلع مجسم ديكر مستویین زاويه لرنده دخی مشترك بولنورسه اول وقت مستویین زاویه سی ضلع مجسم اورته يه كلك اوزره ب<sup>ق</sup> ق<sup>ق</sup> مثللو کوستریلور .

(۴): مقياس زاويه لری مساوی اولان مستویین زاويه لری بربرينه مساوی اولدینی کي بالعکس مساوی مستویین زاويه لرينك مقياس زاويه لری دخی يکديکرينه مساوی اولور. چونکه ضلع مجسم لری بربری اوزرينه کله جك صورتده برر وجهلری يکديکرينه تطبيق ابدلده ديكر وجهلر دخی تماماً يکديکرينه منطبق اولور.

(۵): مقياس زاویه سی قائمه اولان مستویین زاويه سنك وجهلری يکديکرينه عمود بولنور، تعبير ديكرله قائماً واقع اولور. علی العموم بر مستوی ديکرینی قطع ايدوب ده طرفينده يکديکرينه مساوی ايکي مستویین زاویه سی تشکل ايدر ينی مقياس زاویه لری بربرينه مساوی اولورسه مذکور مستویلر بربرينه قائماً واقع اولور. بوکا عطفاً :

(۶): بر مستوی اوزرنده واقع بر مستقيمدن مستوی مذکوره عمود اولوق اوزره يالکيز بر مستوی اقامه ايدیلور و بالعکس بر مستویین خارجنده

واقع بر مستقیمدن کچەرك مستوی مذکورە قائماً یالکزر بر مستوی تنزیل اولنور .

(۷): معلوم بر مستوی به عمود اولان مستقیمدن کچن هر مستوی ، مستوی معلومه عمود اولور . چونکه حاصل اولان مستویین زاویه سنک مقیاسی دائماً قائمەدر .

(۸): ایکی مستوی اوچنچی بر مستوی به عمود اولسه مذکور ایکی مستوینک فصل مشترکی دخی اوچنچی مستوی به عمود اولور . زیرا فصل مشترک نقطه سندن اوچنچی مستوی به اقامه اولنان عمود ایکی اولکی مستوینک ایکیسی اوزرنده بولنور . یعنی فصل مشترکدن عبارت اولور .

(۹): بر مستوی معلومه مائلاً واقع بر مستقیمدن کچمک اوزره مستوی معلومه یالکزر بر مستوی قائم رسمی ممکندر . چونکه مستقیم مائل اوزرنده واقع هر قننی بر نقطه دن مستوی معلومه یالکزر بر عمود اقامه وتنزیل اولنه بیلور .

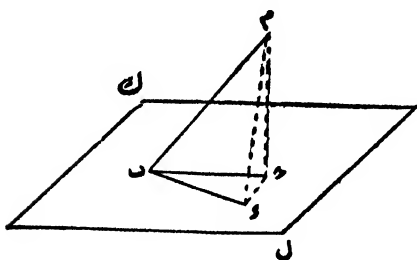
(۱۰): بر نقطه نك بر مستوی اوزرینه « مرئسمی » نقطه مذکور . رەدن مستوی معلومه تنزیل اولنان عمودك موقعندن و علی العموم بر خطك مرئسمی : حاوی اولدینی كافه نقاطك مرئسملرندن عبارتدر . مستوی معلومه « ارتسام مستویسی » و عمودله « عمود راسم » دینلور . (۱۱): بر مستقیمك بر مستوی اوزرینه مرئسمی كذلك بر مستیمدر . چونکه مرکب اولدینی كافه نقاطدن مستوی به تنزیل اولنان عمودلرك موقعلری مستقیم مذکوردن کچوب مستوی معلومه عمود اولان بر مستوینک فصل مشترکی اوزرنده بولنور . بو حواله بر مستقیمك مرئسمی کندیسندن کچوب ارتسام مستویسنه عمود اولان بر مستوینک ارتسام مستویسیله فصل

بشتر کردن عبارتند. اشبو مستوی عموده «مستوی راسم» تعبیر  
اولنور. ارتسام مستویسه عمود اولان بر مستقیم مرسمی بر نقطه اوله جفی  
آشکاردر.

(۱۲): بر مستقیم کندی مرسمی ایله احداث ایلدیکی زاویه:  
مستقیم ارتسام مستویسه قطع ایلدیکی نقطه دن کچن و بمستوی داخلنده  
بولنان سائر مستقیملر ایله تشکیل ایلدیکی زاویه لردن کچو کدر.

چونکه (شکل — ۱۳) ،  $\alpha$  (م ب) نک ل ارتسام مستویسنده  
مرسمی اولسون. ارتسام مستویسه داخلنده ب نقطه سندن چیزیلان کیف  
ما اتفاق بر مستقیم اوزرنده  $\beta = \gamma$  اخذ م ایله  $\delta$  ب پیلری وصل  
اولندقه  $\{ \alpha \cdot 25 \cdot 8 \}$  (۲)  $\gamma > \alpha$ ؛ اولوب  $\gamma$  م ،  $\beta$  م مثلر لردن

$\{ \alpha \cdot 29 \cdot 8 \}$  تنبیه  $\gamma > \alpha$  و  
بولنور.



شکل ۱۳

(۱۳): بر مستقیم  
کندی مرسمیله احداث  
ایلدیکی زاویه ، مستقیم  
ارتسام مستویسه اولان  
میلندن عبارت اولوب اشبو

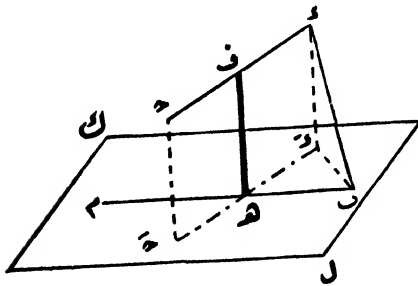
زاویه مستقیم مذکورک، ارتسام مستویسه عمود بر مستقیم ایله تشکیل  
ایلدیکی زاویه نک تمامنه مساویدر.

(۱۴): بر مستوی به موازی اولان بر مستقیم ایله مستوی آره سنده کی  
بعد و مسافه مستقیم هر قفی بر نقطه سندن مستوی به و

(۱۵): مستویین متوازیین آره سنده کی بعد و مسافه دخی برینک کیف  
ما اتفاق بر نقطه سندن دیکرینه، تزیل اولنان عموددن عبارتند.

مسئله - (۱): بر برینه موازی و ملاقی اولیان ایکی مستقیمک بریسندن بر مستوی امرار ایتک مطلوبدزکه دیگرینه موازی اولسون.

صورت حلی : مذکور مستقیملردن بریسنک کیف ما اتفاق بر نقطه سندن دیگرینه بر موازی رسم ایدیلوب بو وجهله حاصل اولان مستقیمین متلاقیسندن امرار ایدیلان مستوی { ۱ ، ۶ } مستوی مطلوبدن عبارت اولور .  
(۲): بر برینه موازی و ملاقی اولیان ایکی مستقیمه عمود مشترک رسم ایتک مطلوبدر .



شکل ۱۴

صورت حلی : اولاً ( شکل ۱۴ - ) مذکور مستقیملرک بریسندن [ فرضاً م ب دن ] دیگرینه [ یعنی ۷ و مستقیمه ] موازی اولان (کل) مستویسی کچیریلور؛ ثانیاً : ۷ و مستقیمنک (کل) مستویسی

اوزرینه ۷ و مرئسمی آنور؛ ثالثاً: اشبو مرئسم ایله م ب مستقیمنک فصل مشترکی اولان ه نقطه سندن ه ف (کل) [ یعنی ه ف || ۷ و یا ۷ و ] رسم ایدیلور. بو حالده ه ف مطلوب اولان عمود مشترکدن عبارت اولور .

(۱) : بعد مجردده واقع بر نقطه دن بر مستقیمه یالکز بر موازی و یا عمود رسم اولندیغک ؛



ص): بر مستویك خارجنده واقع بر نقطه‌دن تنزیل اولسان عمودك موقعندن، موقعلری مساوی بعده بولان مستقیم مائللرك بر برینه مساوی اولدیفك، موقی اوزاق اولان مستقیم مائلك موقی یقین اولاندن اوزون بولدیفك،

ز): بر مستقیم بر مستوی اوزرنده بولان بر مستقیمه موازی اولسه مستوی مذکوره دخی موازی اولدیفك،

س): معلوم بر مستوی به موازی اولان بر مستقیمدن کچن بر مستویك مستوی معلوم ایله فصل مشترکك مستقیمه موازی اولدیفك،

ه): بر مستوی به موازی اولان بر مستقیمدن کچن مستویلرك مستوی معلوم ایله فصل مشترکری یکدیگرینه موازی اولدیفك،

و): ایکی موازی مستقیمدن برینه موازی اولان مستویك یکدیگرینه دخی موازی اولدیفك،

ز): معلوم بر مستقیمه موازی اولان ایکی مستویك فصل مشترکی مستقیم معلومه موازی اولدیفك،

ح): مستویین متوازیینك مستوی آخرله فصل مشترکریك یکدیگرینه موازی اولدیفك،

ط): مستویین متوازیینك آره‌سنده، محصور موازی قسم مستویلرك مساوی اولدیفك،

ی): مستویین متوازیینك بعدلری یکدیگرینه مساوی اولدیفك،

ك): بر مستقیمه عمود اولان ایکی مستویك یکدیگرینه موازی اولدیفك،

ل): بر نقطه‌دن بر مستوی به موازی اوله‌رق یالکز بر مستویك رسمی ممکن اولدیفك،

(م) : خطین متوازی‌نیدن بریسی بر مستوی به عمود اولسه دیگری دخی  
مستوی مذکوره عمود اولدیفنك ؛

(ن) : بر مستوی به موازی اولان ایکی مستویك یکدیگرینه دخی موازی  
اولدیفنك ؛

(س) : بر مستقیمدن کچهرک بر مستوی به یالکیز بر مستوی قائم رسم  
اولدیفنك ؛

(ع) : معلوم بر مستقیمه عمود اولان دیگر بر مستقیم ، مستقیم معلومك  
مستوی قائمه موازی اولدیفنك و یا خود مستوی مذکور داخلنده  
بولدیفنك ؛

(ف) : بر مستویك خارجنده واقع بر نقطه‌دن مستوی مذکوره رسم  
اولنان موازیلرک محل هندسی نه اولدیفنك ؛

(ص) : یکدیگرینه عمود اولان ایکی مستویدن بریسنك داخلنده بولنق  
اوزره فصل مشترکینه تنزیل و یا اقامه اولسان عمودلرک دیگر  
مستوی به عمود اولدیفنك ؛

(و) : یکدیگرینه عمود اولان ایکی مستویدن بریسنك داخلنده واقع بر  
نقطه‌دن دیگرینه تنزیل اولنان عمودك مستویلرک فصل مشترکی  
قائماً قطع ایتدیکنك ؛

(ز) : بر مستویدن مساوی بمد و مسافه‌ده بولسان بالجله نقاطك محل  
هندسی نه اولدیفنك ارائه سی مطلوبدر .



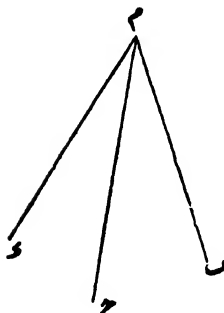
# ایکجی فصک

موت زوایای مجسمه

(۱۳۵)

## تعریفات

بعد مجردده واقع بر م نقطه سنده ملاقی اولان، م ب، م ۷، م ۸ و  
مثلاً (شکل - ۱۵) ده کوستریلان اوج مستقیمک هر ایکسندن برر



مستوی امرار ایدیلورسه «اوج وجهی»، (ذوئله

وجوه) و علی العموم بر نقطهده تقاطع ایدن

قدر مستقیملرک هر ایکسندن معین بر صره اوزره

برر مستوی کچیریلورسه «وجهی» بر زاویه

مجسمه محدث ایلر. نقطه مذکوره به زاویه نك

«رأسی»، مستقیملرک هر بریسه «ضلع مجسمی»، شکل ۱۵

هر ایکی ضلع مجسمندن کچن مستوی به «وجهی»، «هر ایکی ضلع مجسمی

آرمه سنده کی ب ۷، ۸، ۹، و م ۱۰ زاویه لرینه «زاویه وجهیه سی» و هر ایکی

وجهی ییننده کی زاویه به «مستویین زاویه سی» تسمیه اولنور. بو کتابده

یا لکز «زوایای محدبه» دن یعنی هر زاویه وجهیه سی و مستویین زاویه سی

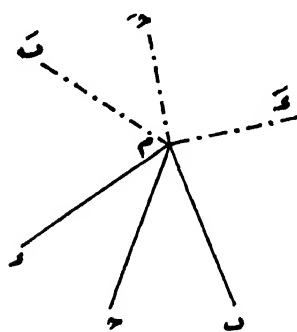
ایکی قائمه دن کجوک اولان و هیچ بر مستقیم ایله ایکیدن زیاده نقطهده قطع

ایدیله میان و بر مستوی ایله مقطعی بر شکل ذو کثیر الاضلاع محدبدن عبارت اولان زوایای مجسمه دن بحث اولنه جقدر .

زاویه مجسمه یا بالکتر رأسیله مثلاً م ایله ویاخود رأس نقطه سی وضع  
مجسملری اوزرنده بر نقطه آلهرق: م (۷۵) ایله ارانه ایدیلور .

## (188)

(شكل — ۱۶) م (م ۷) مثلث برزائیه مجسمه نك م رأسه و جهلرك هر برینه اقامه اولان م ب م ۷ م ۷ عمودلری واسطه سیله تشكیل ایدن ایكنجی م (ب ۷) زاویه مجسمه سنه اولكینك « متممى ، ویا « قطیسی ، تعبیر اولنور. ایكنجی زاویه مجسمه نك هر ایكى متعاقب ضلع مجسمی (مثلا م ب ایله م ۷ م ۷ ایله م ۷ م ۷) عمود اولدینی ایكى (م ۷ م ۷ ایله م ۷ م ۷ م ۷ ایله م ۷ م ۷) وجهك فصل مشتركه {۳، ۲} نتیجه (۲)



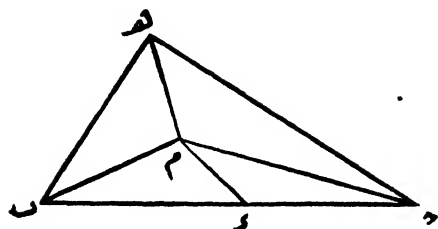
شکل ۱۶

عمود بولند یقندن برنجیسنك دخى هر ضلع  
محسبی ایکنجیسنك ایکی ضلع محسمنه  
(م)  $\perp$  م، م، م؛ م ح  $\perp$  م، م، م؛ م م؛  
م،  $\perp$  م، م، م ( یعنی {S۳، نتیجه ۱} بر  
وجهنه عمود بولنقله معلوم اولان زاویه  
محسمه قطیدسنك قیطیسی، ( یکدیگر سنك  
قطیسی ) دخی اولور. مذکور ایکی زاویه  
محسمه دن رینك زاویه وجهه لری {S۱۱،

(۱) دیگرینک مستویین زاویه لرینک متممی اولدینی و بالعکس برینک مستویین زاویه لری دیگرینک زاویه وجهی لرینک متممی بولندینی آزملاحظه اوله آکلاشلور .

( ۱۵ §

دعوى : اوج وجهلى زاوية مجسمة ده هر زاوية وجهيه ديكر ايكسى  
مجموعندن كچوكدر .



شكل ۱۷

اشبو دعوانك زواياى وجهيه.  
دن اك بيوكى و مثلاً (شكل-۱۷)  
م (ب د ه) زاوية مجسمة سنك اك  
بيوك اولان ب م ح زاوية وجهيه.  
سى حقننه اثباته احتياجى اولمغله  
يالكىز بونك اثباتى ايله اكتفا

ايديله جكدر . بونك ايجون ب م س = ب م ه ، م س = م ه اخذ و رسم و زاوية  
مجسمة ب س د ه مستوي سيله قطع ايدلنكده { ۲۰ § . ه . ب م س = ب م ه  
اولوب بوسيدن س ب = ه و بناء عايه د س = د ه اولور . حالبوكه  
{ ۱۴ § . ه . ب م س = ب م ه اولديفنن د س > د ه اولمغله { ۳۹ § . ه  
{ ۲ } د م س > د م ه اولوب ب م س = ب م ه مساواتيله طرف طرفه جمع  
ايدلنكده :

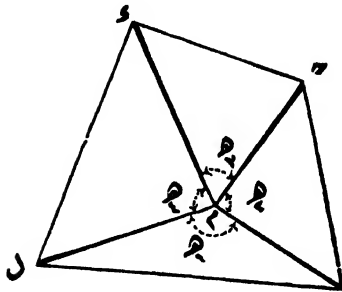
$$د م س > د م ه + ه م ب اولمش اولور .$$

نتيه : ه وجهلى زاوية مجسمة ده هر زاوية وجهيه ديكر زاوية وجهيه  
مجموعندن اصغر در .

( ۱۶ §

دعوى : ه وجهلى هر زاوية مجسمة ده اولاً : زاوية وجهيه لر مجموعى  
( ۴ قا ) دن كچوك و ثانياً : مستويين زاويه لرى مجموعى { ۲ - ۴ } قا { دن  
بيوكدر .

اثباتی :- (شکل-۱۸) اولاً : م (ب > ل) زاویه مجسمه‌تک زاویه



وجهی‌لری مجموعی «م» ایله اراشه اولوب زاویه مجسمه مذکوره بر مستوی ایله قطع اولندقدن حاصل اولان ب > ل ذو کثیر الاضلاعک هر رأسنده اوج وجهی برر زاویه مجسمه و ذو کثیر الاضلاعک عدد رأسلری، زاویه مجسمه معلومه‌تک وجهی‌لری قدر اولدیفندن ،

شکل ۱۸

اطرافنده قدر اوجر وجهی زوایای

مجسمه تشکیل ایدر. امدی مذکور اوج وجهی زاویه مجسمه‌لرک هر برنده برر زاویه وجهی، ذو کثیر الاضلاعک برر زاویه‌سندن عبارت اولوب اشبو زاویه وجهی‌لرک هر بری ایسه {۱۵§} مجاوری اولان دیگر ایکی زاویه وجهی مجموعندن اصغر [مثلاً ب > ل م + م ل ب] در . بو حالده ذو کثیر الاضلاعک زوایای مجموعی، هر زاویه‌سنه مجاور اولان ایکیشر زاویه وجهی‌لرک مجموعندن کچوکدر . حالبوکه ذو کثیر الاضلاعک زوایای داخله‌سی مجموعی {۴۷§.۵} {۲-۴} قا اولدیفندن و هر وجه مثال شکلنده بولندیفندن:

$$(۲-۴)قا > (۲قا-۴) + (۲قا-۴) + (۲قا-۴) + ... اولوب$$

$$\therefore (۲قا-۴) > ۲قا - (۴+۴+۴+...) \therefore$$

$$۲قا - ۴ > ۲قا - ۴ \text{ «م»}$$

$$-۴قا > -۴ \text{ «م» و یا خود «م» } -۴قا اولوب$$

طرفی (۱-) ایله ضرب ایدیلورسه غیر مساوی اشارتک دخی جهتی تبدیل ایده‌جکندن :

میچ  $h > e$  قا اولمش اولور.

ثانیاً: ب، ب، ب، ..... ایله  $\infty$  وجهلی زاویه مجسمه مک مستویین  
زاویه لری؛

ب، ب، ب، ..... ایله زاویه مجسمه معلومه مک قطیسی اولان  
زاویه مجسمه مک زاویه وجهیه لری کوتره لم:  $\{e, 14\}$  توفیقاً:

$$\left\{ \begin{array}{l} b + h = e \text{ قا} \\ b + h = e \text{ قا} \\ b + h = e \text{ قا} \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right. \text{اولوب طرف طرفه جمع ایدر}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{و (میچ ب) ایله: } b + b + b + \dots\dots\dots + b + b + b + \dots\dots\dots \text{مجموعه} \\ \text{(میچ ه) } h + h + h + \dots\dots\dots + h + h + h + \dots\dots\dots \text{کوتره رسه مک} \end{array} \right.$$

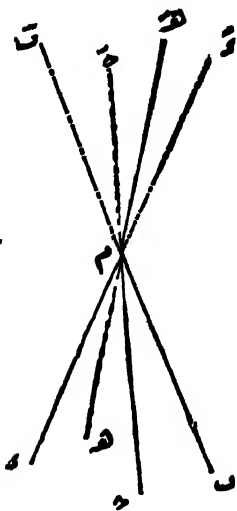
$$\begin{aligned} \text{میچ ب} + \text{میچ ه} &= e \text{ قا و یا خود} \\ \text{میچ ب} &= e - \text{میچ ه بولنور.} \end{aligned}$$

لک رنخی شقه نظراً میچ  $h > e$  قا اولدیفندن بالاده کی مساواتده  
میچ ه رینه بودن اعظم اولان  $(e \text{ قا})$  وضع اولنورسه:  
میچ  $b < e - \text{قا} = e - \text{میچ ب} < e - (e - \text{میچ ه}) = \text{میچ ه}$  قا بولمش اولور.  
تلییه: میچ  $h$ ، (۰) ایله  $(e \text{ قا})$ ، میچ  $b$ ،  $\{e - \text{قا}\}$  ایله  $(e \text{ قا})$   
آره منده بولنور.

### ( ۱۷ §

(شکل — ۱۹) م (ب ح ه) مثللو بر زاویه مجسمه مک ضلعلرینک

استقامت اوزره اخراجندن حاصل اولان م (ب ح ا ه) زاویه مجسمه‌سی،



اولکینک «رأساً مقابلدر»، رأساً مقابل زاویه

مجسمه‌لرک زوایای وجهیه‌سی و مستویین زاویه‌لری

عینی بر صره تحتده یکدیگرینه مساوی ایسه‌ده

جهتلی بر بریک عکسی اولدیغندن مذکور زاویه

مجسمه‌لر صورت عمومیه‌ده تماماً بر برینه منطبق

اوله‌مدینی اجلدن شکلاً دخی بر برینه مساوی

اوله‌ماز. بعد مجردده اقسای یکدیگرینه معکوس

بر طرزده صره ایله بر برینه مساوی اولق

اوزره-تشکل ایدن بومثللو شکلده «متناظر» و م

شکل ۱۹

نقطه‌سه «نقطه تناظر» تعیر اولنور. بوتعریفه

کوره رأساً مقابل اولان زاویه مجسمه‌لر «متناظر» اولور .

### دعاوی

(۱): ایکیشر زاویه وجهیه‌سیله آرله‌رنده‌کی مستویین زاویه‌لری

(۲): برر زاویه وجهیه‌سیله بوللره مجاور اولان ایکیشر مستویین

زاویه‌سی؛

(۳): اوج زاویه وجهیه‌سی؛

(۴): اوج مستویین زاویه‌سی؛

یکدیگرینه مساوی اولان اوج وجهلی ایکی زاویه مجسمه‌م بر برینه مساوی

وهم متناظر اولور. [یعنی رأساً مقابل اوج وجهلی ایکی زاویه وجهیه

شکلاًده مساوی اولور .]



(۳.۲.۱) نجی دعوالر هندسه مسطحه ده مثلثلرک عینی نومرو تحتنده بولنان مساوات دعوالری مثللو اثبات اولنور.  
(۴) نجی دعوی، زاویه معلومهک قطبیسنی آلمق صورتیهله (۳) نجی دعویه ارجاع ابدیلور.

تذیه: ایکی زاویه وجهیه و بونلردن برینه مقابل مستویین زاویه سی ویاخود ایکی مستویین زاویه سی و بونلردن برینه مقابل زاویه وجهیه سی معلوم اولان اوج وجهلی زاویه وجهیهک اقسام متبایه سی قطعياً و تماماً تعیین اولانه مر.

§ (۱۰۱۷)

### — وظائف —

- (ا): ضلع مجسملری یکدیگرینه عمود اولان اوج وجهلی بر زاویه مجسمه ده مستویین زاویه لرندن هر بری نیه مساوی اولدیفنک؛
- (ب): یکدیگرینه عمود اولان اوج مستویین متشکل اوج وجهلی بر زاویه مجسمه ده زاویه وجهیه لرندن هر بری نیه مساوی اولدیفنک؛
- (ج): ضلع مجسملری یکدیگرینه عمود اولان اوج وجهلی بر زاویه مجسمهک قطبیسنی قاچر درجهک زاویه وجهیه و مستویین زاویه سنه مالک اولدیفنک اراهه سی مطلوبدر؛
- (د): درت دیوار آره سنده بولان وطوانی مستوی برشکلده اولان بر اوطه ده قاچ زاویه مجسمه واردر، قاچر وجهلیسدر، رأسلری نره ده در.



# اَوْجُجِي فَصِّلْ

اشكال كثيرة الوجوه — منشور — اهرام — اجسام ناقصة .

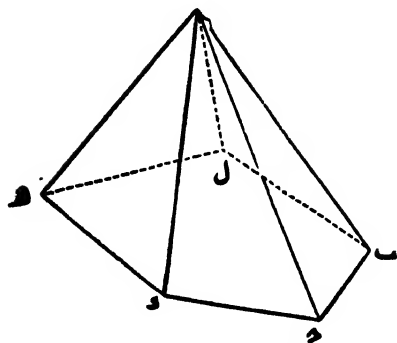
باب اول

مبحث ذو كثير الوجوه

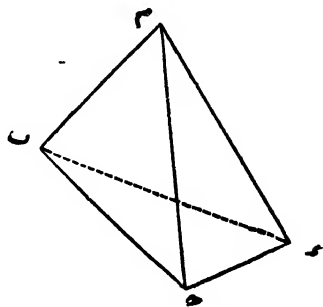
( ١٨ § )

تعريفات

(١) : (شكل — ٢٠) ب ح د مثلثو دردنجي بر مستوي (وجه)



شكل ٢١



شكل ٢٠

ايه تحديد اولسان اوج وجهي بر زاوية مجسمه دن حاصل اولان شكله  
« ذو اربعة الوجوه » تعبير اولنور. اشبو شكلك هر وجهي مثلث اولوب  
هر ايكي وجهك فصل مشتركه « ضلع مجسم » و هر اوج وجهك فصل  
مشترك نقطه سنه « رأس » دبنلور.

(۲): (شکل — ۲۱) ﴿ وجهلی بر زاویه مجسمه یکی بر ب ح و دل

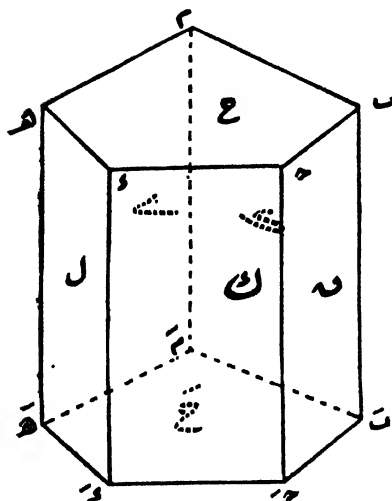
مستویسی ایله تحدید ایدیلورسه: وجهلری مثلندن، «قاعدہ سی»، وجهلرک  
یکی مستوی ایله فصل مشترکریک تولید ایتدیکی شکل کثیر الاضلاعدن  
عبارت اولمق اوزره ﴿ وجهلی بر اهرام ، حاصل اولور . وجهلرک  
مشترک نقطه سی ﴿ وجهلی اهرامک «رأسی» واشبو رأسدن اهرام مذ-  
کورک قاعده سنه تنزیل اولنان عموده ارتفاعی، اولور .

(۳): اهراملر ، قاعده لری مثلث ، مربع ، مستطیل ، ..... غمسی ،  
مسدس، ..... اولدیغنه نظراً «اهرام ثنائی (شکل — ۲۰) ، مربعی  
(شکل — ۳۳) ، مستطیلی، ..... غمسی (شکل — ۲۱) ، مسدسی (شکل — ۳۸)  
..... ناملرینی دخی آلیر.

(۴): ذو اربعة الوجوهده (اهرام مثلثیده) هر قننی بر وجه قاعده انحاذ  
اولنه بیلور. بوحالده اشبو قاعده نك قارشوسنده کی رأسندن کنديسنه تنزیل  
اولنان عمود ارتفاع اعتبار اولنور .

(۵): (شکل — ۲۲) ﴿ بَ، جَ، دَ، هَ، مَ ..... فصل مشترکری  
یکدیگرینه موازی اولان، ﴿ قدرک، ل، ع، ک ..... مستویلرله محاط  
و ایکی ح، حَ مستوی موازی ایله محدود اولان شکله ﴿ وجهلی منشوره  
تعیر اولنوره. مذکور ایکی موازی مستوی نك یکدیگرینه اولان بعدی  
منشورک « ارتفاعندن ، واشبوا یکی مستوی اوزرنده، سائر مستویلر واسطه  
سیله ، تحدت ایدن ﴿ ضلعی ب ح و ه م ، بَ جَ ه مَ شکلری منشورک

« قاعده لرزدن » عبارت اولور . فصل مشترکری موازی اولان مستویله  
دخی برر متوازی الاضلاع اولوب منشورک « وجهلرینی » تشکیل ایدر .



شکل ۲۲

(۶) : منشورلر ، قاعده لری مثلاً ،  
مربع ، متوازی الاضلاع ، مستطیل .....  
مخمس ، مسدس ، ..... اولدیفنه نظر آ  
« منشور مثلثی ( شکل - ۳۷ ) ، مربعی ،  
متوازی الاضلاعی ، مستطیلی ( شکل -  
۳۵ ) ..... مخمس ( شکل - ۲۲ ) ،  
مسدسی ، ..... ناملرینی دخی آلیر .  
وجهلری قاعده لرینه عمود اولورسه  
منشوره « قائم » دینیلور . منشور  
مستطیلی قائمه ، قاعده لری ووجهلری  
موازی مستطیللردن مرکب اولدیفندن

« متوازی المستطیلات » دخی تسمیه اولتورکه بررأسنده بولنان اوج ضلع  
مجسم یکدیگرینه عمود بولوب متوازی المستطیلاتک « ابعاد ثلثه سی »  
وعینی بروجه اوزرنده بولنمان ایکی رأس ییتنه موصول مستقیمه « قطری »  
تعبیر اولتور .

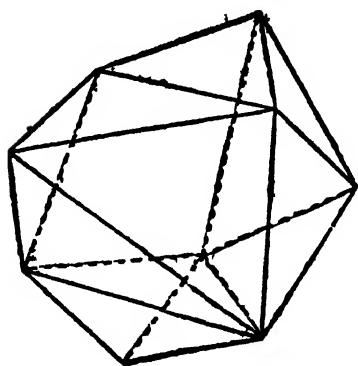
(۷) : متوازی المستطیلاتک ضلع مجسملری یکدیگرینه مساوی بولورسه  
شکل مذکور « مکعب » نامی آلیر .

(۸) : قاعده لری متوازی الاضلاع [ مربع ، معین ، مستطیل دخی  
(۵)

داخل [ اولان منشورلوك مقابل وجهلری بربرینه موازی اولدینی آشکارا اولغله بوشللو حنشورلرده هر قفنی مقابل ایکی وجه ، قاعده و اولکی ایکی قاعده ، وجه اعتبار اوله ییلور .

(۹) : منشورك قاعده لرینه موازی مستویلر ایله حاصل اولان مقطعلری [ ضلعلری موازی مستقیملره محصور موازی قسم مستقیملردن عبارت اولوب زاویه لرینك ضلعلری دخی عینی جهته موازی اولدقلرندن ] یكدیكرینه وقاعده لره مساوی اولور .

(۱۰) : حجمك مساحه سیچون برضلی واحد قیاسی طوله منساوی اولان مكعب قوللانیلوب « برجسمك حاوی اولدینی بوشللو مكعبلرك یعنی واحد قیاسی حجمك مقداری ، مساحه حجه سندن عبارت اولور .



(۱۱) : ( شکل - ۲۳ ) علی الموم مستویلره محاط اولان شکل مجسمه « ذو کثیر الوجوه » تسمیه ایدیلور .

[ ۱۹۵ ] غ . م . ۰

اوله ر ( Euler ) دعواسی

رؤسی  $h$  =  
 عدد { وجوهی  $u$  = فرض اولسان بر  
 ذو کثیر الوجوهده  
 اضلاعی  $v$  =

شکل ۲۳ . اولور .  $h + v = u + 2$

اثباتی : ذو کثیر الوجوهی تحدید ایدن ذو کثیر الاضلاعلرك هر برینك

عدد اضلاعی صره سیله :

[ غ . م . ۰ ] شاگردانه خجوری اولورق کؤستر یلیجه بلك ماده اشارتند .











یضدن دائما ح ۴ اولوق و (۳) مساوانده کی کسرك قیمتی هر وقت بر عدد تامدن عبارت بولنقی لازم کلدیکی درکار اولمغله :

$$(۱): ع = ۳ \text{ اولورسه ص} = \frac{ح ۶}{۴ + ح} \text{ ویا ح} = \frac{۴ ص}{۶ - ص} \text{ اولوب (ص).}$$

انجق ۴۰۳ ووه قیمتری ویریله بیله جکندن بوکا نظراً :

$$\left. \begin{array}{l} \text{اشکال} \\ \text{مجموعه} \\ \text{احداث} \\ \text{اولنه بیلور} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ص} = ۳ \\ \text{ح} = ۴ \\ \text{یکرمی وجهلی} \\ \text{(ذو عشرين الوجوه)} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = ۴ \\ \text{ح} = ۸ \\ \text{سکزو جهلی} \\ \text{(ذو ثمانية الوجوه)} \end{array} \right. \text{یا لکنز}$$

$$(۲): ع = ۴ \text{ اولورسه (۳) افاده سی: ص} = \frac{ح ۴}{۲ + ح} \text{ ویا ح} = \frac{۲ ص}{۴ - ص}$$

اولوب (ص). انجق ۳ قیمتی ویریله بیله جکندن بوکا کوره :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = ۳ \\ \text{ح} = ۶ \\ \text{القی وجهلی} \\ \text{(ذو ستة الوجوه)} \end{array} \right. \text{یا لکنز}$$

$$(۳): ع = ۵ \text{ اولورسه (۳) افاده سی: ص} = \frac{ح ۱۰}{۳ - ح} \text{ ویا ح} = \frac{۴ ص}{۳ - ۱۰ ص}$$

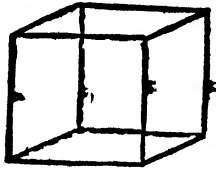
اولوب (ص). بنه انجق ۳ قیمتی ویریله بیله جکندن بوکا توفیقاً دخی :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = ۳ \\ \text{ح} = ۱۲ \\ \text{اون ایکی وجهلی} \\ \text{(ذواتی عشرة الوجوه)} \end{array} \right. \text{یا لکنز}$$

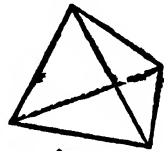
(ع ۶) اولدقجه (۳) مساوانک سول طرفنی تشکیل ایدن کسرك صیوبرنی مخرجنندن دائما کچوک اولوب بو حالده ص ایچون بر عدد تام بولوق

ممکن اولدیقتن مجذب زاویه مجسمه لک را ایلانده، میبای بد اضلاع حاصل ایتمک اوزره، ملاقی اولان محدب و عدد ضای مساوی اشکال اطلسیه تحدث ایدن اجسام ذو کثیره الوجوه یالکز بش عددن (درت، سکز، یکر می، النی و اون اپکی وجهلی) عبارت اولاجنی مرتبه نبوته واریر.

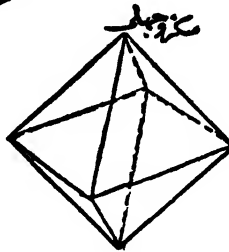
اگر وجوه مذکوره فضله اوله رق اشکال منتظمه دن ایسه بونلردن متشکل اجسام ذو کثیره الوجوه دخی منتظم اولورکه مطالعات سابقه عطفاً



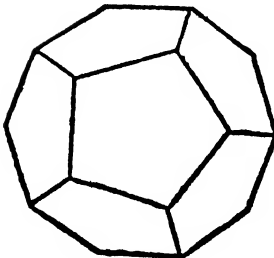
الترجیهلی



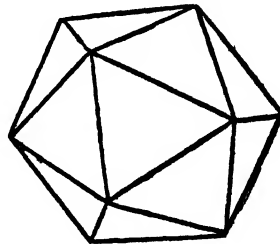
درت وجهلی



سکز وجهلی



اونایکوجهلی



یکر می وجهلی

(شیکل — ۲۵) یالکز بش عدد اشکال مجسمه منتظمه نک موجود اوله یی و مسدس منتظمه لک انحادیلہ [ اوج زاویه یی مجموعی درت قائمه

مساوی اولسی سبيله [ زاویه مجسمه محدبه نك تشكيلي ممكن اولديني وعيني سبیدن بشدن زیاده مثلثات منتظمه ] مثلثات متساویه الاضلاع [ و اوجدن زیاده مخمس منتظم و یا مربع ایله زوایای مجسمه محدبه تشکيل ایديله ميه جکی اکلا شیلور .

## § ٢٠ (١٠)

### — وظائف —

- (١) : برامام و بر منشور مربعی شکلنك مرسمأ ارأه سی ؛  
 (ب) : « ، مستطیلی و بر منشور مثنای « ، « ، « ،  
 (ج) : « ، و بر منشور متوازی الاضلاعی ، « ، « ،  
 (د) : « ، « ، شبه منحرفی « ، « ،  
 (هـ) : « ، « ، معینی « ، « ،  
 (و) : « ، « ، مسدسی « ، « ،  
 (ز) : « ، « ، مثنی « ، « ،  
 (ح) : بر منشور مخمس قائم « ، « ،  
 (ط) : بر متوازی المستطيلاتك قطرينك مربعی ، ابعاد ثلثه سنك  
 مربعلری مجموعنه مساوی اولديغنك ارأه سی مطلوبدر .

### باب ثانی

### مبحث منشور

## § ٢١ (٢١)

قوالیر قاعده سی : ایکی موازی مستوی آرہ سنده بولان ایکی جسمك ،  
 كرك اشبو ایکی مستوی ایله و كرك بونلر آرہ سنده بولان مستوی موازیرله  
 حاصل اولان مقطعلری نظیر نظیره سطحاً مساوی [ معادل ] اولور ایسه

او ایکی جسم دخی حجماً مساوی [معادل] اولور .  
 فی الحقیقه هر ایکی جسمده مقطعلرک عددی و برموجب فرضیات  
 سطحاری نظیر نظیره مساوی اولدیفندن و جسملر انلرک مجموعندن تشکیل  
 ایتمش کبی اعتبار اولنه بیله جکندن حجملری مساوی اوله جفی آشکاردور .

§ (۱۰۲۱)

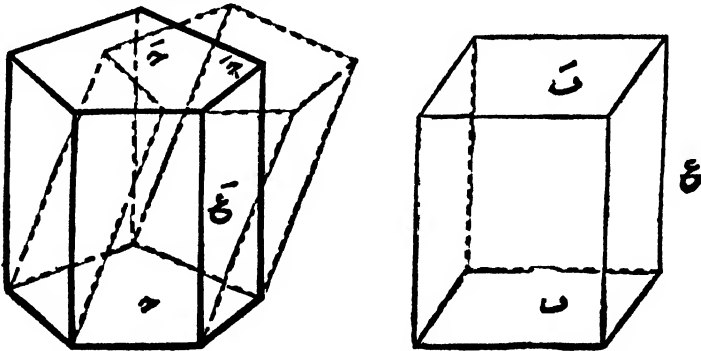
— دعاوی —

(۱): ارتفاعلری مساوی، قاعدهلری معادل اولان متوازی المستطیلات

ایله منشور حجماً مساوی یعنی یکدیگرینه معادل اولور.

اثباتی: (شکل — ۲۶) ع، غ ارتفاعلری یکدیگرینه مساوی اولدیفندن

[مذکور-متوازی المستطیلات ایله منشور، موازی ایکی مستوی ایله محدود



شکل ۲۶

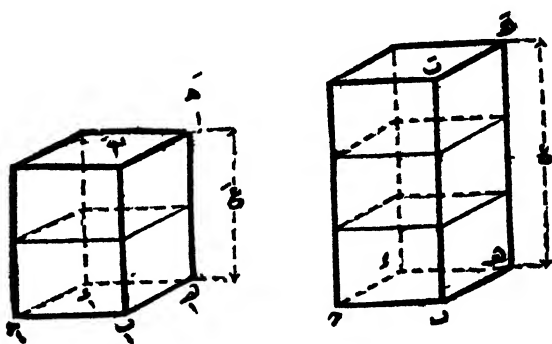
دیمک اولوب اشیو مستویله موازی مستویله حاصل اولان مقطعلری

دخی (ت = ب) [ب = ح] ، ح اولسی سببیه ( دائماً معادل اولقله

(قوالیر) قاعده سنه نظراً حجماً مساوی اولور.

(۲): قاعدہ لری مساوی اولان متوازی المستطیلاتر ارتفاعلری  
متاسیدر .

اثباتی: (شکل - ۲۷) مثلا ب و د ه ( = ) ، ب و د ه ( = ) قاعدہ  
لری بربرینہ مساوی اولان ه ه ه متوازی المستطیلاترینک بیندہ کی  
نسبتی ه ه ( = ع ) ، ه ه ( = غ ) ارتفاعلری بیندہ کی ع غ نسبتہ  
مساویدر .



شکل ۲۷

اولاً: ع، غ مشترک  
المیزان فرض اولہرق  
قاسم مشترک لری ع  
ارتفاعندہ (مثلاً ۳)  
ع ارتفاعندہ (مثلاً ۲)  
دفعہ داخل اولہ قاسم  
مذکور اشبو ارتفاعلری  
اوزربنہ بالطبیق حاصل  
اولان تقسیمات نقطہ .

لوندن ے ے قاعدہ لربنہ مستوی موازیلر رسم اولندقدہ { ۱۸ ۸۰ } و  
{ ۲۱ } ه ه ه متوازی المستطیلاتری دخی عینی قسمدہ مساوی متوازی  
المستطیلاترہ تقسیم ایدلیدی جہتلہ  $\frac{ع}{غ} = \frac{ب}{د}$  اولور . لکن بر موجب

$$\text{فرضیات } \frac{ع}{غ} = \frac{ب}{د} \text{ اولدیفندن: } \frac{ع}{غ} = \frac{ب}{د} \text{ اولش اولور .}$$

ثانیاً: ع، غ ارتفاعلری غیر مشترک المیزان فرض اولہرق ع ارتفاعی  
قدر اقسام متساویہ تقسیم و اشبو قسملردن بری ع اوزربنہ نقل  
و توالی ایدلیدی وقت م دفعہ دن زیادہ، (۱+م) کردن آؤ تکرر ایدرسہ

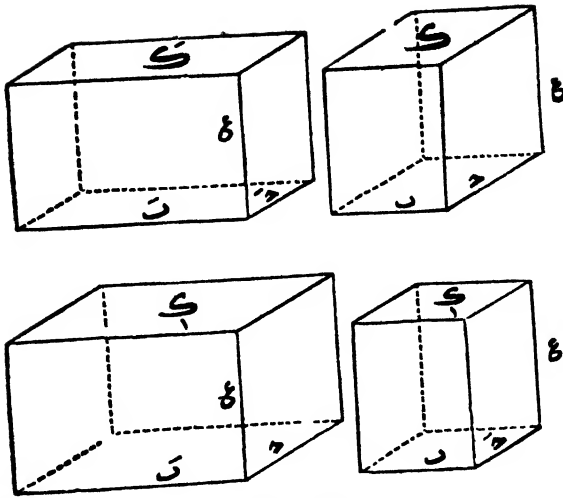
$$\frac{ع}{ع} < \frac{ع}{ع} ، \frac{ع}{ع} > \frac{ع}{ع} \text{ اولدینی ظاهر در } .$$

ایمدی تقسیمات نقطه لرندن ۷، ۷ قاعده لرینه مستوی موازیر رسم اولدندقه ۷ دخی ۷ اقسام حجمیه متساویه تقسیم اولنوب ۷ ایسه اقسام مذکورده دن بریسی م دفعه دن زیاده ، (۱+۲) کرده دن آز حاوی اولدیفندن  $\frac{ع}{ع} < \frac{ع}{ع} ، \frac{ع}{ع} > \frac{ع}{ع}$  اولور. حالبوکه  $\frac{ع}{ع} ، \frac{ع}{ع}$  نسبتلری  $\frac{ع}{ع} ، \frac{ع}{ع}$  حدلری آره سنده بولنوب بینلرنده کی  $\frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع}$  فرقی  $\frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع}$  دن یعنی مفروض اقسامک بریسندن اصغر اولوب ۷ ایستقلدیکی قدر بیوک اخذ اوله جفندن  $\frac{ع}{ع}$  تصور اوله بیلان طوللردن دها کچوک اوله جنی و بناء علیه  $\frac{ع}{ع} - \frac{ع}{ع}$  فرقی صفره منجر بولنه جنی جهته  $\frac{ع}{ع} = \frac{ع}{ع}$  اولوق لازم کلوب مطلوب ثابت اولور .

تنییه : ب ه ، ب ب ، ب ب ایله ب ب ب ب متوازی المستطیلاتک ابعاد ثلثی اولوب ب ه = ب ه ، ب ه = ب ه فرض اولدیفندن دعوای سابقه « ایکی بعدی مساوی اولان ایکی متوازی المستطیلات اوچنجهی بعدلریله متناسبدر ، طرزینه دخی ارجاع اولنور .

(۳): ارتفاعلری مساوی اولان متوازی المستطیلاتر قاعده لرله متناسب

اولور .



آبائی : مثلاً

(شکل - ۲۸)

متوازی المستطیل۔

تک بری ے :

ارتفاعی ع، قاعدہ

سی ے ( = ۷ × ب )

دیکری ے : ارتفاع۔

عی ع، قاعدہ سی

ے ( = ۷ × ب )

اولسون .

شکل ۲۸

ارتفاعی ع، قاعدہ سی ے ( = ۷ × ب، یا خود ب × ۷ ) اولیٰ اوزرہ

اوجنی بر ے متوازی المستطیلانی تصور ایدہم، اولاً :

ے متوازی المستطیلانک ابعاد ثلاثی : ع، ب، ۷ اولغلہ

$$\left\{ \begin{array}{l} ۷, ب, ع \\ ۷, ب, ع \end{array} \right. \quad \text{تنبیہ } \left\{ \begin{array}{l} ۷ \\ ۷ \end{array} \right. = \frac{۷}{۷} \dots \dots (۱)$$

و ثانیاً :

ے متوازی المستطیلانک ابعاد ثلاثی : ع، ب، ۷ اولغلہ

$$\left\{ \begin{array}{l} ۷, ب, ع \\ ۷, ب, ع \end{array} \right. \quad \text{تنبیہ } \left\{ \begin{array}{l} ۷ \\ ۷ \end{array} \right. = \frac{۷}{۷} \dots \dots (۲) \text{ اولوب (۱) و (۲)}$$

مساواتلری طرف طرف ضرب ایدلکده :  $\frac{۷}{۷} = \frac{۷ \cdot ب}{۷ \cdot ۷} = \frac{۷}{۷}$  اولور.





کے = (۷۰۳ + ۷) اولوب کے متوازی المستطیلاتی ب . ح . س  
قدر واحد قیاسی حجمی حاوی دیمک اولفله { ۱۸ ، (۱۰) } مذکور  
متوازی المستطیلاتک مساحة حجمیہ سی:

$$ک = ب . ۷۰۳ + (۱) اولش اولور .$$

تنبیہ - (۱): (۱) مساواتی کے = (۷۰۳ + ۷) س = ۷۰۳ س شکلہ دخی وضع  
اولنہ یلمکہ متوازی المستطیلاتک مساحة حجمیہ سی ارتفاعک ، قاعدہ سی  
سطحہ حاصل ضربنہ دخی مساوی اولدینی اکلاشیلور .

(۲): مکعبہ ب = ۷ = س اولہ جفتدن مساحة حجمیہ سی:

$$ک = ب = ۷۰۳ + (۲) اولور .$$

### § ۲۳ (۱)

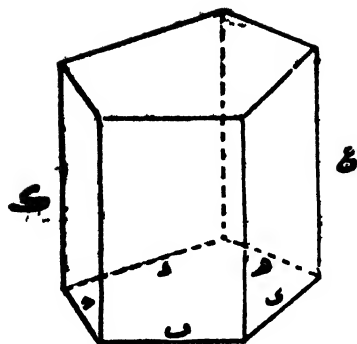
دعوی: قاعدہ سی ے ، ارتفاعی ع اولان کیف ما اتفق بر منشورک  
کے مساحة حجمیہ سی کذلک ارتفاعک قاعدہ سنہ حاصل ضربنہ  
مساویدر .

اثباتی: ارتفاعلری مساوی ، قاعدہ لری معادل اولان منشور ایله  
متوازی المستطیلات { ۱۸ ، ۱۰ ، (۱) } حجماً مساوی اولفله:

$$ک = ع . ۷۰۳ + (۳) اولوق لازم کلیر .$$

### § ۱۰۱۳ (۱)

دعوی: بر منشور قائمہ وجهلربنک مساحة سطحیہ سی مجموعی:  
ارتفاع منشورک، قاعدہ سی محیطہ حاصل ضربنہ مساویدر .



شکل ۲۹

اثباتی: (شکل-۲۹) منشور

قائمك قاعده سنك ضلعلى ب، ح، د، ه، ی؛

ارتفاعى ع اولسون. منشور، قائم فرض

اولديغندن وجهلى مستطیل الشكل

اولغله مساحتى سطحى لرى: ع. ب، ع. د، ع. ه، ع. ی

اولوب جمع ايدلگده

منشورك وجهلىنك مساحتى سطحى

اوله جنى آشكاردر. بناء عليه مساحتى

سطحى مذكوره بى (مجم ح) ايله كوستيرسهك :

$$\text{مجم ح} = \text{ع ب} + \text{ع د} + \text{ع ه} + \text{ع ی} = \text{ع} (\text{ب} + \text{د} + \text{ه} + \text{ی})$$

بولنور.

حالبوكه معترضه دروننده بولنان مقادير منشورك قاعدهسى اولان ذو كثر

الاضلاعك محيطندن عبارت اولغله (مجم ب) ايله اراشه اولنورسه :

$$\text{مجم ح} = \text{ع} \cdot \text{مجم ب} \dots\dots\dots (۴) \text{ اولمش اولور.}$$

نتیجه: منشور قائمك قاعده لرى ل، ل، ل فرض اولنورسه هر ايكسى

برجسته مساوى اولديغندن منشور مذكورك سطح خارجى

$$= \text{ع} \cdot \text{مجم ب} + ۲ \cdot \text{ل} \dots\dots\dots (۵) \text{ اولور.}$$

§ ۲۳. ب

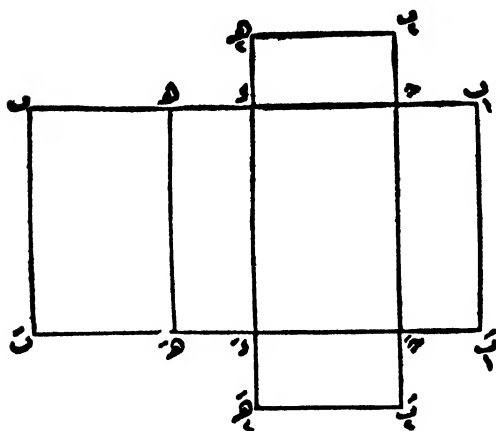
تعريف: بر شكل مجسمك انكشافى شكل خارجىنه مساوى برشكل

مستوى رسم اتمك ديمكدر. بوحالده مثلا بر منشور قائمك انكشافى وجهلىنك

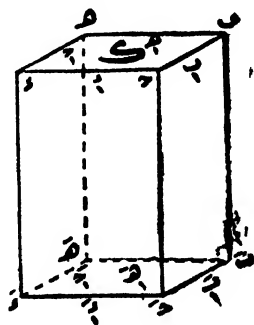
مساحتى سطحىنه مساوى رسم اولنان مستطيله اوست و آلت قاعده لرىنك

هنى انضماميله استحصال اولنور.

بالتسليم بر شكل مجسمك، هر قنې بر وجهنك مستويى اوزرينه  
انكشافى ايجون مذكور وجهى تحديد ايدن ضلع مجسملر محور اعتباريله  
ويكبر وجهلرى وقاعده لرى دور ايتديره رك وجه مفروضك بولدينى  
مستوى به تطبيق ايتدير مكله اولور. بو حالحه مثلا (شكل — ۳۰) ك متوازي  
المستطيلاتك انكشافى (شكل — ۳۱) ايله و (شكل — ۳۲) ك اهرام مربعينك  
انكشافى (شكل — ۳۳) ايله كوستريلندن عبارتدر.



شكل ۳۱



شكل ۳۰

تنبيه (۱): مندور قائمك انكشافنده اوست والت قاعده لرك محيطلرى، يكد يكرينه  
موازي بر مستقيم توليد ايتديكي وكيف ما اتفاق منشور لرك انكشافلرنده مذكور  
محيطلر، قسملرى بر برينه موازي اولان بر حط منكسر حاصل ايلديكي آشكاردر.  
(۲): (شكل — ۳۱) مثللو قالين بر كاغد ويا مقوا كسيلوب ۶، ۶، ۶، ۶، ۶، ۶  
۶، ۶ استقامتنده قيرلدقن صوكره قباديلورسه (۳۰) نجى شكل حاصل  
اولور. بو حالحه قابل انكشاف اولان هر شكل مجسم قالين كاغد ويا مقوا  
ايله بالسهوله تشكيل ايديله بيله جكي اكلاشيور.

(۳) : (شکل — ۳۱) {  $\begin{matrix} \text{و} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \\ \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} \\ \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \end{matrix}$  } اولوب

(شکل — ۳۰) ده:  $\begin{matrix} \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \\ \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} \\ \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \end{matrix}$  اولوب كذلك (شکل — ۳۰) ده  $\begin{matrix} \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \\ \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} \\ \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \end{matrix}$

اولدینی و (شکل — ۳۱)  $\begin{matrix} \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \\ \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} & \text{==} \\ \text{ب} & \text{د} & \text{ز} & \text{س} & \text{پ} & \text{ب} \end{matrix}$  الخ قسم مستقیماری متوازی المستطیلاتك ارتفاعلندن عبارت بولدینی کورلمکده در. بناء علیه هر قننی بر منشور قائمك انکشافی ایچون :

اولاً — یینلرنده کی بعداد ارتفاع منشوره مساوی ایکی مستقیم موازی { رسم ایدیلمك ثانیاً — هر قننی بر نقطه دن بر عمود مشترك

ثالثاً — عمود مشترك موقعلندن اعتباراً منشورك قاعده.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{لرینك ضلعلرینه مساوی ، موازیر اوزرنده صره} \\ \text{ایله قسم مستقیملر اخذه} \end{array} \right.$  اولنق و رابعاً — متناظر نقطه لرك یینلری وصل

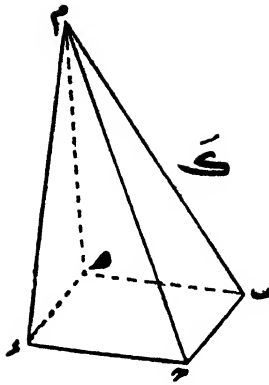
خامساً — انکشاف هانکی وجهك مستویسنده یاییلیورسه  $\left\{ \begin{array}{l} \text{انك ضلع فوقانی و تحتانیسی اوزرنده اولجه اخذه} \\ \text{ایدیلمش اولان قسم مستقیملرك صره سنی نظر} \\ \text{مطالعیه آهرق، منشورك قاعده لرینه مساوی} \\ \text{شکلر وجوده} \end{array} \right.$  کتیریلیمك

کفایت ایدر.

§ ۲۳ . >

— وظائف —

(۱) : (شکل — ۳۴) یکدیگرینه موازی (م) . (م) مستویلرینی تصور



ک

ایده لم. (م ه) مستویسی اوزرنده

ب س و = ح ط ی ، (و = ک) رسم ،

ب و ب و و ابله ه ح ط ، ط ی ، ی ه

مستقیملرندن (م ه) مستویسی داخلنده

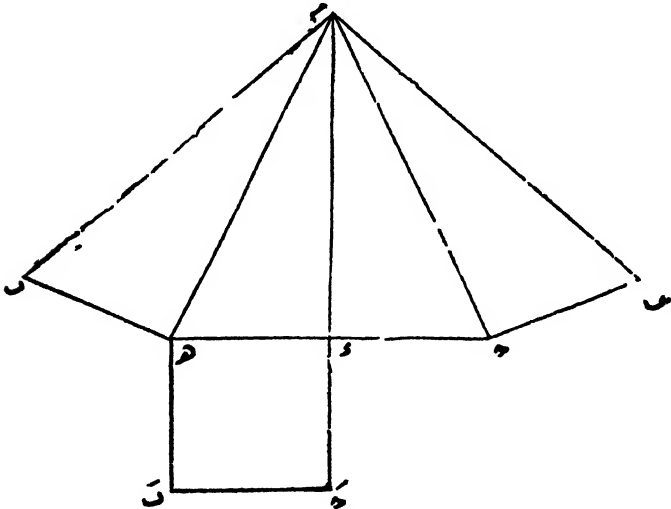
$\frac{و}{ح} - \frac{ک}{ک}$  اولق اوزره : (ب و = و) ،

بله (= ح ط ی) شکلرینی حاصل ایدن (ب و) ،

(و و) ، (ب و) ابله (ه ی) ، (ی ط) ، (ط ح) ،

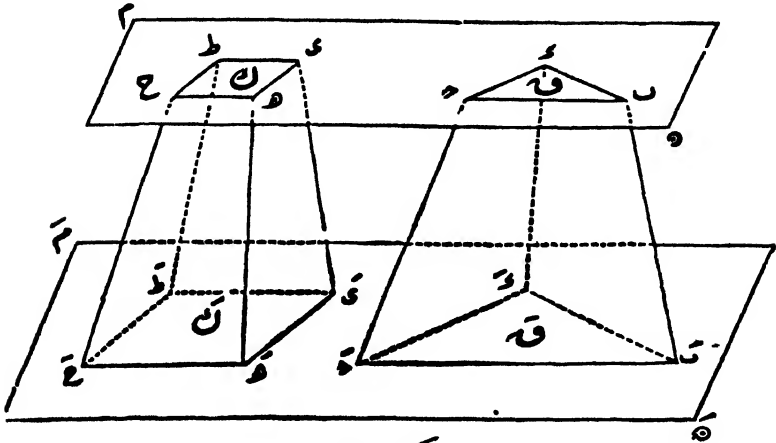
(ح ه) مستویلرینی امرارایله لم. اشبو مستویلر

شکل ۳۲  
واسطه سیله تشکل ایدن ه ه ، کے جسملرینک یکدیگرینه  
معادل اولدیفنک ؛



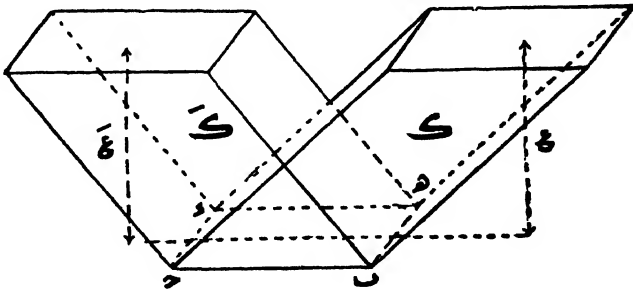
شکل ۳۳

(ب) : (شکل — ۳۵) قاعدۀ تختانیلری [۳۷ و ۳۸] مشترک و تَع. ع ارتقا  
علری مساوی اولان ک. ک منشورلری معادل بولندیئتک  
اراشی :



شکل ۳۴

(ج) : قاعدہلری مثلث متساوی الاضلاعدن عبارت اولان بر منشور  
قائمک اولاً : بر قاعدہسی ، ثانیاً : بر وجهی اوزرینه انکشافی :



شکل ۳۵

(د) : قاعدہلری مسدس منتظمندن عبارت اولان بر منشور قائمک اولاً :



## ❦ مسائل ❦

- (۱): بر مکعب، قطرینک ضلع مجسمی [  $۳۰۲ = م$  ] جنسندن قیمتق بولق ؛
- (۲):  $۵۲۵ م$  حجمنده متوازی المستطیلات شکنده بر اودون بیفینک عرضی  $۷ م$ ، طولی  $۲۰۵ م$  اولدینی معلوم ایکن ارتفاعنک قاج مترهیه مساوی اولدینی حساب ایتمک مطلوبدر .
- (۳): ابعادثلهسی  $ب = ۳ م$  ؛  $ح = ۵۰۱۲ م$  ؛  $ع = ۸۰۰۵ م$  اولان بر منشور متوازی الاضلاعینک مساحه حجمیهسی ؛
- (۴): اضلاع ثلهسی  $ب = ۲۰۱۵ م$  ؛  $ح = ۲۰۰۰ م$  ؛  $ع = ۱۰۰۳ م$  اولان بر متوازی المستطیلاتک مساحه حجمیهسی مطلوبدر .
- (۵): متوازی المستطیلات شکنده طولی  $= ۶۰۵۰ م$  ؛ عرضی  $= ۲۰۷۵ م$  ؛ ارتفاعی  $= ۳ م$  اولان بر بیفین اودون صانون آلمق ایستیورزه بر متره مکعبی اودونک فیثائی  $\frac{۱}{۲}$  مجیدیه اولورسه مذکور بیقنه قاج مجیدیه وبرمه مجبورز ؟
- (۶): متوازی المستطیلات شکنده ، ابعاد ثلهسی  $ب = ۱۰ م$  ؛  $ح = ۴ م$  ؛  $ع = ۱۰۲۵ م$  اولان بر بیفین قومه مکعب شکلی وبرلدیکی تقدیرده ارتفاعی قاج متره اولور ؟
- (۷): قطری  $۵ م$  طولنده اولان بر مکعب مساحه حجمیهسی حساب ایتمک مطلوبدر .
- (۸):  $۱۰ م$  ارتفاعنده منشور مثلثی متساوی الاضلاع شکنده بر آنباره



قاعده سنك برضای ۷ م ایسه قاج کبله [اعشاری] آرہ قونیہ بیلور؟

(۹): ۸ م ارتفاعده، ۹۸ م<sup>۳</sup> حجمنده بولان برمنشور مربعینك قاعده سنك

برضای قاج متره اولور؟

(۱۰): ۵۰ م<sup>۳</sup> عمقده برحوضك قاعده سی، هرضای ۳ م اولان، مسدس

منتظم شکلنده دره، ثانیہ دم صواجرا ایدن برموصلق تقدیر زمان

ظرفنده مذکور حوضی املا ایدر؟

(۱۱): برینك ضلع مجسمی ۳، دیکرینك ۴ و اوچنبیسینك ۵ متره

اولان اوچ مکبک مساحه حجمیه لری مجموعنه مساوی دردنجی

بر مکبک ضلعی قاج متره اولور؟

(۱۲): برمنشور مربعینك قاعده سنك برضای ۱۵ م اولوب ارتفاعی

ضلع مذکورك اوچ مثله مساوی اولدینی معلوم ایکن منشور مذکور

رك سطح خارجیسینی بولوق؟

(۱۳): سطح خارجیسینی ۴۶ ۲۶۰ م<sup>۲</sup> اولان بر مکبک مساحه حجمیه سنی

حساب ایتمک؛

(۱۴): طولی = ۴ م، عرضی = ۳ م اولان و ارتفاعی قاعده سنك قطرینه

مساوی بولان برمتوازی المستطیلاتك مساحه حجمیه سنی حساب ایتمک؛

(۱۵): قاعده سنك، محیطی الی متره مساوی اولان بر مسدس منتظمین

و ارتفاعی بر متره دن عبارت اولان

اولاً — سطوح جناحیه سنك مساحه سطحیه لری مجموعنی؛ حساب  
بر منشور قائمك: { ثانیاً — سطح خارجیسینك مساحه سطحیه سنی؛  
{ ثالثاً — مساحه حجمیه سنی؛ ایتمک؛

(۱۶): بر منشور مثانی قائمك قاعده سی مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه

اولوب اشبو قاعده نك و ثر قائم سی = ۳۰۲۵ م منشورك ارتفاعی = ۶۰۲۵ م

اولدینی حالده منشورك مجموع اضلاعك طولنی حساب ایتك مطلوبدره  
 (۱۷): منشور مربعی قائم شكلنده براوطه تك عرضی ویا طولی  $= ۸ م$  ،  
 ارتفاعی  $= ۴۰ م$  اولوب بالجله اضلاعه التون بالدیزلی باقیر جوقلر  
 قونیللق ایستنیور . مذکور جوقلرک بر متره طولی  $۲۰۸۷۵$   
 غروشه اولدینی حالده مجیدیه ۱۹ غروش حسابیله ، قاج مجیدیه  
 تأدییه ایتك لازمدر ؟

(۱۸): منشور مخمسی منتظم شكلنده انشایدلش اولان برحوضك قاعده  
 سنك برضلی  $= ۱ م$  ، عمقی  $= ۱۱ \frac{۳}{۴}$  اولورسه قاج لیتزه صوآلیر ؟  
 (۱۹):  $۳ \frac{۱}{۲}$  م ارتفاعنده منشور مثالی متساوی الاضلاع شكلنده قور  
 شوندن بر صوخزینه سی انشا اوللق ایستلیور . منشورك قاعده سی اولان  
 متاتك برضلی ایکی متره در . قورشونجی جناح سطحلرینك بهر متره  
 مربعی ایچون ۱۰۰ غروش وقاعده سطحلرینك بهر متره مربعی ایچون  
 $۱۲۴ \frac{۱}{۲}$  غروش طلب ایندیکی حالده :

اولاً — مصرف کاملی ،  
 ثانیاً — منشورك سطح خارجینه معادل بر مربعك ضلعی ،  
 ثالثاً — محیط منشورك اضلاع مجسمه سی طوللرینك مجموعنه مساوی  
 اولان بر مربعك مساحه سطحیه سی قدر اولور ؟

(۲۰) + : کسمه بر طاشك ایکی وجهی هم مساوی ، هم موازی اولوب  
 یکدیگرندن  $۰۰۴۸ م$  بعدنده در .

مذکور ایکی وجه :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ارتفاعی} = ۰۰۷۰ م \\ \text{قاعده فوقانیسی} = ۱۰۳۷ م \\ \text{د تحتانیسی} = ۱۰۶۱ م \end{array} \right.$  اولان شبه

منحرفدن عبارت اولدینی وضلعلری نظیر نظیره موازی بولندی حالده ؛  
 اولاً — طاشك نه شكلده اولدینی ثانیاً — دسیمتره مکبی جنسندن حجمی مطلوبدره

+ (۲۱): قاعده سنك نصف قطر  $\sqrt{3}$  م اولان وار قاعی ۱۰۷۶

متره دن عبارت بولان قائم بر منشور مسدسی، منتظمك اولاً —  
سطح خارجینی؛ ثانیاً — بر متره مربعه جلاجرقی ۱۰ غروش  
اولدینی حالد قاج غروش ویریلک لازم کلدیکنی حساب ایتمک؛

+ (۲۲): بر منشور مربعینک حجمی  $\sqrt{3}$  م، قاعده سنك قطری = ۱۰۴۱ م  
اولدینی معلوم بولندینی حالد منشور مذکورک ارتفاعیه قاعده سنك  
ضلعی بولق؛

(۲۳): بر منشور مربعی قائمک ارتفاعی قاعده سی ضلعینک اوج مثله و حجمی  
سکسان بردستره مکعبنه مساوی اولدینی معلوم ایکن ابعادنک سنی  
حساب ایتمک؛

(۲۴): حجمی (۲دم) نه مساوی اولق اوزره بر مکعب اعمال ایلمک؛

(۲۵): حجمی (۱۰۰م) نه مساوی اولان بر مکعبک سطح خارجینی حساب  
ایتمک مطلوبدر .

## باب ثالث

### مبحث اهرام

( ۲۴ §

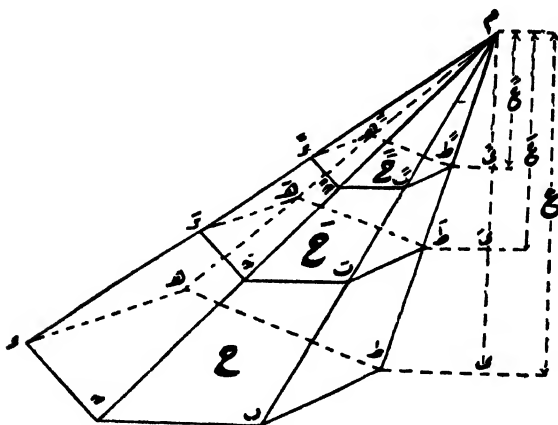
دعوی : بر اهرامک قاعده سنه موازی رسم اولنان مستویلرک اهرام  
مذکورک سطوح جناحیه سیله حاصل ایندیکی مقطعلر، بونلره قائد ارقا -  
بهارک مربعلریله متناسبدر .

مثلاً (شکل - ۳۶) م (ب و د و ط) اہرامنک ب و د و ط (= ح) قاعدہ۔  
سنہ موازی رسم اولان، فرضا ایکی مستویک حاصل ایتدیکی ب و د و ط  
(= ح) ؛ ب و د و ط (= ح) مقطعلری ییتدہکی  $\frac{ب}{ح}$  نسبتی بونلره هاند

اولان ع، ع ارتفاعلریک مربعلری ییتدہکی  $\frac{ع^2}{ح}$  نسبتہ مساوی یعنی

$$\frac{ح}{ع} = \frac{ع^2}{ح} \text{ در.}$$

انبائی: { ۱۲، ۱۰، ۸ } ب و د || ب و د اولغله { ۷۷، ۵۰، ۷۷ }.



شکل ۳۶

{ ۲ } م ب و د ~ م ب و د ~ م ب و د اولوب { ۷۴، ۵۰، ۷۴ } (ب)  $\frac{ب}{ح} - \frac{ب}{ح}$

وعنی سیدن طولای  $\frac{7}{4} = \frac{7}{4}$  اولدینی جهته  $\frac{7}{4} = \frac{7}{4}$  و اشبو  
اصول تمقیب ایدیلرک :

$$\frac{7}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \text{ بولور.}$$

ایشته  $\frac{7}{4}$  و  $\frac{7}{4}$  ،  $\frac{7}{4}$  و  $\frac{7}{4}$  ذو کثیر الاضلاع لرینک ضلع لری نظیر  
نظیره موازی و متناسب اولدیندن  $\{ 10.5 \}$  و  $\{ 10.5 \}$  ،  $\{ 10.5 \}$  مذكور

$$\text{شکل لریک مشابه اولسی حسیله } \{ 10.5 \} \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \dots (1)$$

می عمودیه منلام ط ضلع مجسمندن کچن مستوینک  $\frac{7}{4}$  ،  $\frac{7}{4}$  مقطعلریله  
حاصل ایندیکی  $\frac{7}{4}$  ،  $\frac{7}{4}$  فصل مشترک لری دخی (  $\frac{7}{4}$  ) به موازی

$$\text{اولدیندن } \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \text{ و ذاتاً } \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \text{ اولغله } \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \therefore \frac{7}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{7}{4} \dots (2) \text{ اولور.}$$

ایمدی بر طرف مساوی اولان ( ۱ ) و ( ۲ ) مساواتنک طرف

$$\text{فانیلری دخی مساوی اوله جفندن } \frac{7}{4} = \frac{7}{4} \text{ اولش اولور.}$$

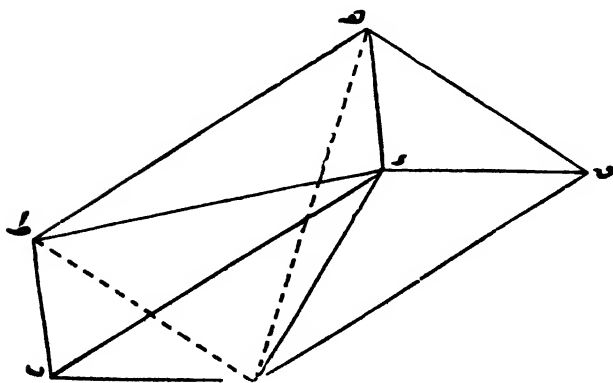
نتیجه — (۱): بوندن اکلاشیلور که مساوی و یا معادل قاعده و مساوی ارتفاعه بولنان ایکی اهرامک، قاعده لینه موازی و بوقاعده لردن بعدلری مساوی اولان مستویلرله مقطعلری یکدیگرینه مساوی و یا معادل اوله جفتدن {§ ۲۱} مذکور ایکی اهرامک حجملری دخی معادل اولور .

$$(۲) : \text{بالاده استخراج اولنان (۱) مساواتنه قیاساً} \quad \frac{\frac{1}{2}(\overline{C})^2}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\overline{C}}$$

$$\text{بولنوب } \{§ ۱۱, ۱\} \quad \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})}, \quad \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} \text{ و بناء علیه :}$$

$$\text{و یا خود } \{§ ۱۱, ۱\} \quad \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})}$$

$$\text{اولش اولور.} \quad \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})} = \frac{\overline{C}}{\frac{1}{2}(\overline{C})}$$



شکل ۳۷

دعوی : بر اهرامك مساحة حجمیهی ارتفاعك قاعدهی سطحه  
حاصل ضربك ثلثه مساویدر.

اثباتی : (شکل-۳۷) (ط ۷ و ۸) ایله اراه اولان منشور مثلثی ط ۷ و ۸  
۷ مستویلرله قطع اولندقدہ : و (ط ۷) ، ۷ ( و ۸ ) و (ط ۷) ایله اراه اولان اوج اهرام مثلثی حاصل اولورکه برنجینک و ایکنجینک  
ط ۷ ، ۷ و ۸ قاعده لری و [ و ۷ رأسلری قاعده لرینه موازی مستویلر  
اوزرنده بولنمی حسیله ] ارتفاعلری بربرینه مساوی اولدیفندن { § ۲۴ ،  
تنیه } یکدیگرینه معادل اولدینی کی [ اهرام مثلثیده هر قننی بوجه قاعده  
اعتبار اولنه بیله جکندن ] ایکنجی و اوچنجی اهرامك ۷ و ۸ ، ط ۷ قاعده  
لری مساوی و [ رأسلری مشترک اولدیفندن ] هر ایکسنک ارتفاعی عینی  
اولغله بولر دخی بربرینه و بوسیدن هر اوچی یکدیگرینه معادل اولوب  
هر بری عینی قاعده و ارتفاعه بولان منشورک ثلثدن عبارت بولدینی  
و بناء علیه { § ۲۴ ، تنیه } نظر مطالامه به آله رق کیف ما اتفق بر اهرامك  
ارتفاعی = ع ، قاعدهی = ۷ ، مساحة حجمیهی = ک ایله کوستر-  
یلورسه :  $\frac{1}{3} ع \cdot ۷ = ک$  ..... (۶)

اولدینی اکلشامش اولور .

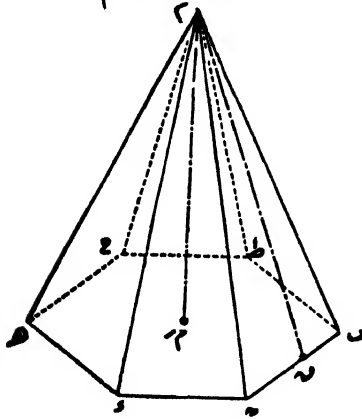
تنیه : ارتفاعی ع ، قاعدهی ۷ اولان ایکنجی بر اهرامك مساحة  
حجمیهی =  $\frac{1}{3} ع \cdot ۷$  اولوب (۶) مساواتیله طرف طرفه تقسیم  
اولنورسه  $\frac{ک}{ع} = \frac{۷}{۳}$  بولنوب ع =  $\frac{۳}{۷} ک$  حالنده  $\frac{ک}{ع} = \frac{۷}{۳}$  ۷ =  $\frac{۷}{۳} ک$   
حالنده  $\frac{ک}{ع} = \frac{۷}{۳}$  اولغله ارتفاعلری مساوی اولان اهراملر قاعده لرله

و قاعده لری مساوی اولانلر ارفاعلریله متناسب اولدینی اکتلاشیلیمش اولور .

(۱۰۳۵ §)

دعوی: قاعده سی شکل منتظم دن عبارت اولوب رأسی قاعده سنک

مرکزندن اقامه اولنان عمود اوزرنده بولنان اهرامه اهرام منتظم ، دنیلوب



شکل ۳۸

یان وجهلری مجموعی رأسندن قاعده .

سنک ضلعلرندن برینه تنزیل اولنان

عمودک، مذکور قاعده نك مجموع اضلاع .

عنه [محیطنه] حاصل ضربینه مساویدر .

[شکل — ۳۸] اهرام مسدوسی منتظمی

ارائه ایدوب (م م) ارتفاعی و (م و) ،

م رأسندن ب ضلعنه تنزیل اولنان

عموددر ]

أبائی: اهرام مذکورک یان وجهلری

بربرینه مساوی . ثلث مساوی الساقینلرندن عبارت اولوب عددی قاعده نك

عدد اضلاعی قدردر . بناء علیه برینک مساحة سطحیه سی قاعده نك عدد

اضلاعه ضرب اولنورسه جمله سنک مساحة سطحیه سی بولنور . بو حالحه

رأسدن قاعده نك ضلعلرندن برینه تنزیل اولنان عمودک طولی = م ، ضاع

مذکورک طولی = ب ، عدد اضلاع = د ، یان وجوه نك سطحلری

مجموعی = میج ح اولسه :



میج ح =  $\frac{1}{4} \cdot م \cdot ب \cdot د$  ..... (۷)  
اولش اولور .

تقییه : اهرامك قاعدهسی (ل) ایله کوستریلورسه:

اهرامك سطح خارجیسی =  $\frac{1}{4} \cdot م \cdot ب \cdot د + ل$  ..... (۸)  
اولور .

( ۲۵ ب )

### وظائف

( ا ) : عینی بر قاعدهیه و مساوی مساحه حجمیه یه مالک اولان بالجله

اهراملرک رأسلرینک محل هندسیسی نه اولدیفنك ،

( ب ) : بر مکعبک وجهلرندن هر قنقی بر یسنك مرکز شکلیله بونك مقابلنده

بولنان وجهك ضلعلرینك هر نقطهسی یئنه وصل اولنان مستقیملر

واسطهسیله نصل بر شکل حاصل اولدیفنك و بو شکلک مساحه

حجمیهسی و وجهلرینك مساحه سطحیهلری مجموعی نیه مساوی

بولدیفنك ،

( ح ) : بر اهرامك ، ضلع مجسملرندن بر یسنك منتصف نقطهسندن کچمك

اوزره ، قاعدهسنه موازاتاً مرسوم مستوی ایله تشکل ایدن کچوک بر

اهرامك حجمی اهرام معلوم حجمنك درتده برینه مساوی

اولدیفنك ؛

( د ) : ارتفاعی قاعدهسنك قطرینه مساوی اولان اهرام مربعینك مساحه

حجمیهسی نیه مساوی اولدیفنك ؛

( ه ) : ارتفاعی قاعدهسنك بر ضلعنه مساوی اولان اهرام مثلثی متساوی

الاضلاعك مساحه حجمیهسی نیه مساوی اولدیفنك ارئهسی مطلوبدره .

(۰.۲۵۵)

## مسائل

۱ + : بر اهرام منتظم مثلثینک یان ضلع مجسملری ۰۰۶۵ م وقاعدہ سی  
اولان مثلث متساوی الاضلاعک ضلعی ۰۰۴ م اولدینی معلوم  
ایکن اهرام مذکورک مساحت حجمیه سی و سطح خارجینک  
مساحت سطحیه سی حساب ایتمک ؛

۲ : قالین کاغذ ایله ویا مقوا ایله :

۱. اولاً — بر اهرام منتظم مثلثی { قاعدہ سنک بر ضلعی = ۵ سم }  
{ یان ضلع مجسمی کذا = ۵ سم }

۲ ثانیاً — بر اهرام منتظم مربعی { قاعدہ سنک مساحتی = ۳۶ سم }  
{ ارتفاعی = ۰۰۰۴ م }

ثالثاً — بر اهرام منتظم مخمس { قاعدہ سنک نصف قطرقائی = ۳ سم }  
{ یان ضلع مجسملرندن بری = ۶ سم }  
تشکیل ایلمک ؛

۳ : ارتفاعی ۵۰۲۵ م وقاعدہ سنک قطری ۳۶۰ م اولان بر اهرام  
مربعینک مساحت حجمیه سی بولوق مطلوبدر .

۴ + : قاعدہ سنک بر ضلعی ۲۰۴ م ویان وجهلرندن بری سنک ارتفاعی  
۸۰۵۰ م اولان بر اهرام منتظم مربعینک یان وجهلرینک مساحت  
سطحیه لری مجموعی و اهرامک مساحت حجمیه سی بولوق ؛

۵ : قاعدہ سنک بر ضلعی ۱۲ سم ، یان ضلع مجسملرندن بری  
۰۰۱۵ م اولان بر اهرامک حجمیه یان وجهلرینک سطحی  
حساب ایتمک ؛

+ (۶): ضلی ۱۰۱۵ م اولان بر مکعب ایله بونک بر وجهی قاعده اتحاد اولمق اوزره ۱ متره ارتفاعده بر اهرام منتظم مربیدن متشکل بر طاشک مساحت حجه سنی و یان وجهلرینک مساحت سطحلری مجموعنی بولمق؛  
اولدیزده

+ (۷): بر اهرام منتظم مثلثینک قاعده سنی محیطی ۱۵۵ م و یان وجهلرندن برینک ارتفاعی ۱۴۰۸ م اولدینی حالده اهرامک مساحت حجه سنی و سطح خارجینی بولمق؛

+ (۸): قاعده سنک ضلی ۵۰ م و یان ضلع مجسمی ۲۲ م اولان بر اهرام منتظم مثلثینک یان وجهلرندن برینک مستویسی اوزرنده انکشافی رسم ایتمک و سطح خارجینی ایله حجهنی بولمق؛

+ (۹): قاعده سنک ضلی بر دسمتره و یان اضلاع مجسمه سندن هربری ۱۰۵ م اولان بر اهرام منتظم مربینک قاعده سنک مستویسی اوزرنده انکشافی رسم ایتمک مطلوبدر.

+ (۱۰): اهرام منتظم مربی شکنده غرائیدن معمول بر دیکلی طاشک ثقلنی حساب ایتمک، (قاعده سنک بر ضلی = ۲۰۲۰ م، ارتفاعی = ۲۲،۸۹ م اولدینسه و غرائینک بر دسمتره مکعبی مقدارینک ثقاتی ۴۰۳۷۰ کیلوگرام بولدینسه نظراً)

+ (۱۱): ارتفاعی سکز متره یه مساوی اولان بر اهرام مربی ایله اون متره ضلعنده بولسان بر مکعب معادل اولدینی حالده قاعده اهرام اولان مربیک بر ضلعنک طولنی حساب ایتمک؛

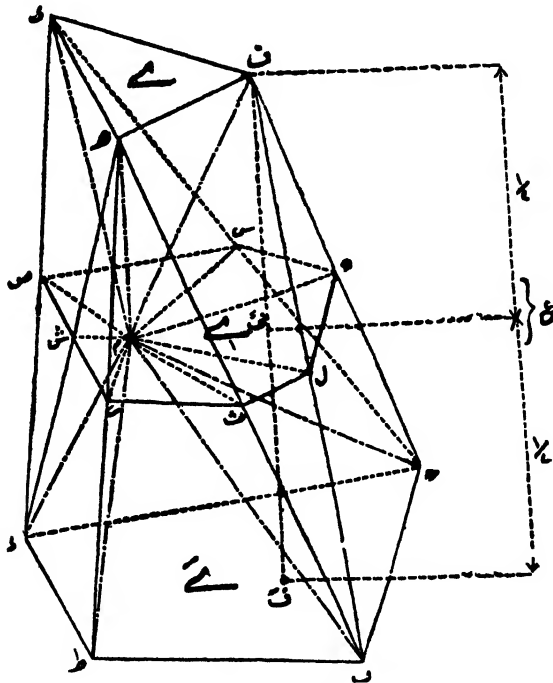
+ (۱۲): بر اهرام مستطیلینک ارتفاعی ۰،۴۰ و قاعده سنک بر ضلی ۱،۲ و دیکری ۰،۸ م اولوب اشبو اهرامک قاعده سینه موازی اولمق و ارتفاعک منتصف نقطه سندن مرور ایتمک اوزره بر

**Abstract**

تعریف : (شکل—۳۹) دہ اولدینی مثللو ھ، ی، ب، ج، د، ط  
 رأسری ے، ے مستویں متوازیی اوزرنده بولنان ویان وجھلری مثللردن  
 [مجاور ایکی مثلث اتحادیلہ تولد ایدن متوازی الاضلاعر ویا شبہ منحرفلر  
 دخی اولہ بیلور] عبارت اولان اشکال مجسمہ یہ «اجسام ناقصہ» تعمیر  
 اولنور۔ مذکور موازی مستویلر اوزرنده تشکل ایدن (و ھ، ی، ب، ح، ط)۔  
 شکل کثیر الاضلاعلرہ جسمک «قاعدینی»، [اوست طرفدہ بولنانہ  
 «قاعدہ فوقانیسی» و آئندہ کنہ «قاعدہ تحتانیسی»، بولنرک بعد  
 و مسافہ سنہ جسمک «ارتقاعی» و اشبو ارتقاعی تنصیف ایدن  
 وقاعدلرہ موازی بولنان مقطعہ «قاعدہ وسطیہ سی»، دینلور۔

(۲۷s)

دعوی: ہر جسم ناقصک مساحۂ حجمیہ سی ے، ے قاعدینسک و ۱  
 قاعدۂ وسطیہ سی درت مثلنک مجموعیلہ ارتفاع جسمک سدسی حاصل ضربینا  
 مساویدر۔ یعنی جسمک مساحۂ حجمیہ سی ے، ے ارتفاعی ع ایلہ  
 کوستبرسہک:



شکل ۳۹

$$= ک = (ے + ے + ے) \times \frac{۱}{۶} ع \text{ اولور۔}$$

اثباتی : (شکل - ۳۹)  $\left\{ \begin{array}{l} \text{ع قاعده سی : ه} \\ \text{ك : ه} \end{array} \right\}$  قدر ضلعی برر ذوکنیر

الاضلاع دن عبارت اولدینی تقدیرده جسم ناقصك مثلث شكلنده اولان  
[شكلمزده ط ه ، و ه ی مثلثی ط ه ی و متوازی الاضلاعنی تشكیل  
ایتمکده در] یان وجهلرینك عددی (ه + ك) در .

ایمدی قاعده وسطیه نك داخلنده النان هر قننی بر م نقطه سیله جسم  
ناقصك هر ضلع مجسمندن برر مستوی کچیریلورسه جسم ناقص :

- ۱) رأسی م ، ارتفاعی  $\frac{1}{4}$  ع ، قاعده سی جسمك ف ه ی قاعده فوقه  
نیسندن عبارت اولق اوزره بر اهرامدن  $\{ \S 20 \} (= \frac{1}{4} \text{ ع} . \text{ه})$  ؛
- ۲) رأسی م ، ارتفاعی  $\frac{1}{4}$  ع ، قاعده سی جسمك ب ح و ط قاعده  
تختانیسندن عبارت اولق اوزره بر اهرامدن  $\{ \S 20 \} (= \frac{1}{4} \text{ ع} . \text{ه})$  ؛
- ۳) رأسی م ، قاعده لری (ه + ك) قدر مثلثلردن عبارت اولان  
(ه + ك) قدر اهرام مثلثلردن ،

ترکب ایندیکی کورلمکده در .

حالبوکه (۳) رقمی تحتده ذکر اولنان اهرام مثلثلردن هربری [مثلا  
م (ب ح ف) ] قاعده وسطیه ایله بری اهرام مثلثی [م (ل ه ف) ]  
اولق و تکمیل اهرامك درنده برینه مساوی [ه] بولنق اوزره ایکی قسمه  
تقسیم اولنور . بو کچوك اهراملر ایچون ، قاعده وسطیه اوزرنده تشكیل

[ه] م (ل ه ف) ، م (ب ح ف) اهراملرینك رأسلری مشترك ، قاعده لری  
عینی بر مستوی اوزرنده بولندیقندن ارتفاعلری عینی اولقله مساحه حجمیه لری  
 $\{ \S 20 \}$  ، تنبیه { قاعده لریله متناسبدر . بناء علیه مثلا برنجیسنك مساحه حجمیه سنه  
ه و ایکنجیسنكکنه ه ؛ ل ه ف مثلثنك مساحه سنه ح و (ب ح ف) نكکنه

ایدن م ل ۱۰ م ۱۰۰ الخ مثلثی، قاعدہ اعتبار ایدیلجک اولورسه  
انلردن بر قسمک راسری قاعدہ فوقانی و قسم دیگرینکی قاعدہ تحتانی  
اوزرنده بولنور. بو حالده هر برینک ارتفاعی  $\frac{1}{4}$  ع اولوب قاعدہ لری  
مجموعی ایسه (ل ۱۰ س ص ش ر ن) قاعدہ وسطیہ نی سطحه و بناءً علیہ  
مساحه حجمیہ لری مجموعی  $(\frac{1}{4} \text{ ع } ۴)$  مساویدر. ایسته راسری م  
و قاعدہ لری جسم ناقصک یان و جهلرندن عبارت اولان یسوک اهراملرک  
مساحه حجمیہ لری مجموعی  $(= \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ \times ۴)$  اوله جفتدن ۲۰۱ نومرولی  
مساوات ایله دخی جمع ایدیلورسه جسم ناقصک حجمی.

$$= \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ + \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ + \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ \times ۴ \quad \text{اولوب بورادن}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ع } (۴ + ۴ + ۴ \times ۴) \dots\dots\dots (۹) \text{ بولنور.}$$

### ( ۲۸ §

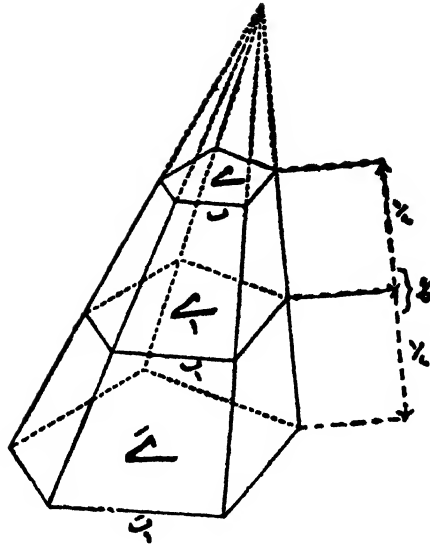
تلییه : ( شکل — ۴۰ ) بر اهرامک قاعدہ سنه موازاتاً بر مستوی  
ایله قطعندن حاصل اولان اهرام ناقصده ۴، ۴، ۴ شکلری یکدیگریه مشابه  
اولدیفندن نظیر نظیره اولان ضلع لری ب، ب، ب ایله اراؤه اولندقدہ  
{ § ۲۴، تلییه (۲) }

$$\frac{\frac{1}{4} \text{ ع } ۴}{\frac{1}{4} \text{ ع } ۴} = \frac{\frac{1}{4} \text{ ع } ۴}{\frac{1}{4} \text{ ع } ۴} \quad \text{اولوب } \{ ۱.۶۸ \text{ §.۸} \} \quad \frac{\frac{1}{4} \text{ ع } ۴}{\frac{1}{4} \text{ ع } ۴} \text{ و } \{ ۰.۷۷ \text{ §.۸} \} \text{ (۲)}$$

$$\frac{1}{4} \text{ ع } ۴ = \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ \quad \therefore \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ = \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ = \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ \\ \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ = \frac{1}{4} \text{ ع } ۴ \end{array} \right\} \text{ اولدیفندن}$$

اولور.

$$\{ \text{۱۱۵.۲} \} \therefore \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$



شکل ۴۰

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

اولوب اشبو کسر لک قیمت مشترک سی م فرض اولنورسه

ب =  $\frac{1}{2} \sqrt{m}$  ،  $\frac{1}{2} \sqrt{m} = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} \sqrt{m} = \frac{1}{2}$  : بنور .

حالبوکه { ۴۶ § .۵ }  $\frac{1}{2} \sqrt{m} = \frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2} \sqrt{m} = \frac{1}{2}$  اولفله محللرینه مساویبری وضع ایدلدهکده :



$$- ۷۰ -$$

$$\therefore \overline{۷۲} + \overline{۷۲} = \overline{۷۲۲}$$

$$\therefore \overline{۷} + \overline{۷} = \overline{۷۲}$$

$$۴ \quad \overline{۷۲} + \overline{۷۲} = \overline{۷۲۲} \text{ بولمغله (۹) مساواتنده محله وضع}$$

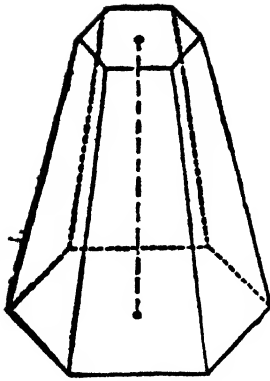
۱۲ یدیلوب اهرام ناقصك مساحت حجبیه سی دخی ۷۲ ابله کوستریلورسه:

$$= \frac{۱}{۲} \times (\overline{۷۲} + \overline{۷۲}) \dots\dots\dots (۱۰) \text{ بولنور.}$$

$$(۱۰۲۸ \text{ §})$$

دهوی : قاعده لری اشکال منتظمه دن عبارت اولان و قاعده لریك مرکز لری، کندیلرینه عمود بر مستقیم اوزرنده بولسان اهرام ناقصك یان وجه لری مجموعی قاعدتینك مجموع اضلاعنك نصفله مذکور قاعده لردن برینك بر ضلعندن دیکرنده نظیری اولان ضلعنه تنزیل اولنان عموده حاصل ضربنه مساویدر . [ شکل — ۴۱ قاعده لری سدس منتظم بر اهرام ناقصی ارانه ایدر ] .

اثباتی : اهرام ناقص مذکورك یان وجه لری یکدیگرینه مساوی شبه منحرف لردن عبارت اولوب عددی، اهرام ناقصك قاعده لردن برینك عدد اضلاعنه مساوی اولدیقتن اشبو شبه منحرف لردن برینك مساحت سطحیه سی اهرام ناقصك بر قاعده سنك عدد اضلاعنه ضرب اولنورسه بالجله شبه منحرف لرك مساحت سطحیه سی بولنه جفی آشکاردر.



بو حالده مذکور شبه منحر فلردن برينك قاعده فوقایسی ب تحتایسی ب و ارتفاعی م و اهرام ناقصك قاعده لرندن برينك عدد اضلاعی و بیان وجهلرینك مساحه سطحیه لری مجموعی میج فرض اولنورسه :

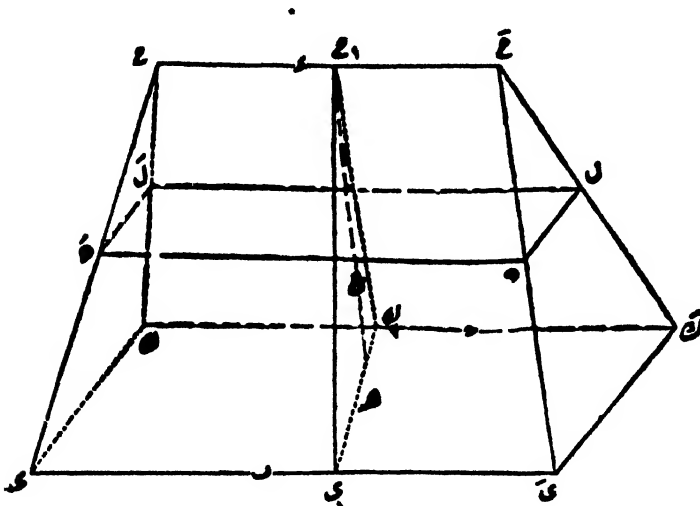
$$\text{میج ح} = \frac{1}{4} م (ب + ب') \dots \dots (۱۱) \quad \text{اولش اولور .}$$

تنیه : اهرام ناقصك قاعده فوقایسی ل

شکل ۴۱

وقاعده تحتایسی ل فرض اولنورسه اهرام ناقص

مذکورك سطح خارجیی  $= \frac{1}{4} م (ب + ب') + ل + ل' \dots \dots (۱۲)$  بولنور .



شکل ۴۲

تذیہ: (شکل — ۴۲) ح ک ی، ح ل ی، قاعدہ لری موازی اولیان ح ی ک  
منشور مثلثی بر جسم ناقص اولوب ایکی موازی ب، ۷ ضلع مجسمک،  
ع قاعدہ تختایسندہ و اوچنچی، ضلع مجسمک دخی ع قاعدہ فوقایسندہ  
بولدیغی فرض و (ب) نک (ج)، اولان بعدینی ه ایله اراہ ایدم.  
فرضیاتمزدہ ع قاعدہ فوقایسک ارتفاعی (و) اولدیغدن:

$$\{ ۱۰۳ \text{ § } ۵.۵ \} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (7 + ۷) = ۱۰۳$$

$$[۵۵] \left( \frac{7+7}{4} + \frac{7+7}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

اولدیغدن (۹) مساواتده محللریه وضع اولندقدہ:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} (7 + ۷) + \left( \frac{7+7}{4} + \frac{7+7}{4} \right) \text{ بولنور.}$$

ایمدی منشور مثاق ناقصک ضلع مجسملریه عموداً بر مستوی ایله  
حاصل اولان ح ک ی، ح ل ی، قاعدہ قایم ط ایله کوستریله رک ط =  $\frac{1}{4}$  ع ه اولمقله  
ه =  $\frac{7}{4}$  ط اولوب بوحالده:

[۵۵] ع دخی شبه منحرف شکله اولوب بر ضلعی  $\frac{7+7}{4}$  و دیگر ضلعی  
و ارتفاعی  $\frac{1}{4}$  ه اولدینی بالسہولہ اکلاشیلقدہ اولدیغدن:  
مطای =  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \left( \frac{7+7}{4} + \frac{7+7}{4} \right)$  در.

**200**

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + (1+2) \right) \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (1+2+3) \frac{1}{2} = 1$$

کده قاعدلری غیرموازی اولان برمنشور مثالی ناقصک مساحت حجبیهسی

$$k = \frac{1+7+9}{3} \dots \dots \dots (13) \text{ اولش اولور.}$$

[۰.۴.۵] (۳۰ §

تنبیہ: (۹) نومرو ایله مرقم اولان افادہ عمومی یعنی ب . ب ۷ مثلاً

ایک موازی شکل [قاعدین] آرومنہ محصور و قاعدہ تختائیدن س ارتفا -  
عندہ هر قنی ر (و) مقطعی :

(y) .....  $\text{و} = \text{ب} + \text{س} + \text{س} + \text{س} + \text{س}$

مساواتیلہ معین اولان کیفی بر جسمک کے حجمی حقدہ دخی جاریدر۔

(۷) مساواتندہ کی ب، ج، د، ہ کمیاتی کیف مایشاء کمیات ثابتہ دن عبارتدر۔

نکمیل ع ارتقاعی ۵ قدر اقسامہ تقسیم و تقسیمات نقطہ لرندن ب ، ے قاعدہ۔

لرینه موازی مستویار رسم ای دیلورسه (۵-۱) قدر مقطعار حصوله کلیر.

اشبو مقطع ایلہ جسمک ے قاعدہ فوقانیسی ، ہر برینک ارتقاعی  $\frac{E}{h}$

اولان منشور لرك قاعده فوقاني لرن دن عبارت كى تصور اولندوقده :

۱۔ قاعدہ فوقائینسک ارتقاعی [قاعدہ تختائیدن اولان بعدی] ع  
۲۔ وسطیہ سنک " " " " " ع

منه تطبیق ایدہ رک یعنی س برینہ ع،  $\frac{1}{4}$  ع؛ و برینہ دے،  $\frac{1}{4}$  وضع ایدہ رک:

$$\left\{ \begin{array}{l} ۷ = ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ \\ ۶ = ۷ + \frac{1}{4} + ۵ + \frac{1}{4} + ۴ + \frac{1}{4} + ۳ + \frac{1}{4} \end{array} \right. \dots\dots\dots (۷) \text{ اولور.}$$

ایمدی حصولی بالادہ تصور اولتان ۵ قدر منشور لک مجموعی معلوم اولان جسمک مساحتہ حجمیہ سندن عبارت اولوب حالبوکہ هر بریسنک مساحتہ حجمیہ سی  $\frac{۷}{۵} \times$  و اولدیفندن بورادہ کی (و) نک قیمتی ، ( لا ) مساواتندہ (س) محلہ (و) نک قاعدہ تختانیدن اولان ارتفاعی متعاقباً وضع اولنہرقی تحدت ایدہ جک اولان افادات جبریہ دن عبارت اولغلہ اشبو افادات جبریہ  $\frac{۷}{۵} \times$  و افادہ سندن و نک محانہ قونیلہرقی جملہ سی جمع ایدیلیمک اقتضا ایدر. بو حالده .

$$\begin{aligned} & \frac{۷}{۵} \left\{ \left( \frac{۷}{۵} \right) ۷ + \left( \frac{۷}{۵} \right) ۶ + \frac{۷}{۵} ۵ + ۷ \right\} = ۷ \\ & \frac{۷}{۵} \left\{ \left( \frac{۷}{۵} \right) ۷ + \left( \frac{۷}{۵} \right) ۶ + \frac{۷}{۵} ۵ + ۷ \right\} + \\ & \frac{۷}{۵} \left\{ \left( \frac{۷}{۵} \right) ۷ + \left( \frac{۷}{۵} \right) ۶ + \frac{۷}{۵} ۵ + ۷ \right\} + \\ & \dots\dots\dots + \\ & \dots\dots\dots + \\ & \frac{۷}{۵} \left\{ \left( \frac{۷}{۵} \right) ۷ + \left( \frac{۷}{۵} \right) ۶ + \frac{۷}{۵} ۵ + ۷ \right\} + \end{aligned}$$

اولوب { م . ۲۳ ، ( ۱ ) و ۲۴ ، ( ۱ ) ، ( ۳ ) } ماده لری پیش نظرہ  
آلہرق ؛

$$ك = ب + ع + \frac{ع}{۴} (۱ + \frac{۱}{۵}) + \frac{ع}{۶} (۱ + \frac{۱}{۵}) (۲ + \frac{۱}{۵})$$

$$+ \frac{ع}{۴} (۱ + \frac{۱}{۵})^۲ \text{ بولنور .}$$

۵ اعظم نامتاهی اوله رق اخذ اولنورسه جسم مفروضك مساحه حجمیه سی:

$$ك = ب + ع + \frac{ع}{۴} + \frac{ع}{۳} + \frac{ع}{۲} + \frac{ع}{۱} + \dots (۱۴)$$

اولوب مثالزده قاعده تختانی ے = ب اولدیفندن اشبو مساوات (۵) مساواتیله  
[ ۵ مساواتك ایکنجیسی (۴) ایله ضرب اولندقدن سوكره ] طرف طرفه جمع  
ایدیلورسه :

$$ے + ے + ے = ۴ = ب + ۳ + ع + ۲ + ع + \frac{ع}{۲} + ع$$

اولوب طرفینی  $\frac{۱}{۲}$  ع ایله ضرب اولندقدن :

$$\frac{۱}{۲} ع (ے + ے + ے) = ب + ع + \frac{ع}{۲} + \frac{ع}{۳} + \frac{ع}{۲} + \frac{ع}{۱} + ع$$

اولغله

$$ك = \frac{۱}{۲} ع (ے + ے + ے) (۱۴) \dots\dots\dots \text{اولش اولوركه}$$

۵ = . اولدینی وقت الیزایده قابل استعمال اولدینی کبی § ۳۱ — ۳۷) نجی  
ماده لرده اجسامك حجمیری حقنده باشقه بر طریق ایله استخراج اولنه جق  
اولان افادات . افاده سابقه نك حالات خصوصیه سندن عبارتدر .

تلیه : ۵ = . ایچون (۱۴) نجی دستور [°]

$$\frac{1}{4}ع [ ۳ + ۲ \{ ۳ + ۲ \times \frac{2}{3}ع + ۱ \} ] = ۷$$

حاله افرای اوله بیلوب ایکنجی بیوک معترضه ایچنده کی افاده جبریہ قاعده تختانیدن ارتفاعی  $\frac{2}{3}ع$  اولان و تعمیر دیگرله ارتفاع کاملک ایکی ثلثنده بولنان برمقلمک مساحه سطحیه سندن عبارت اولدینی (لا) افاده سی کوز لؤکنه کنیر بلرک اکلا شیله جنی جهته (ص) ایله اراؤه اولنورسه :

$$\frac{1}{4}ع (۳ + ۲ ص) \dots \dots \dots (۱۵) \text{ اولور .}$$

§ ۱۰۳۰

### — وظائف —

(۱) : برمکبک	(۹) افاده سنه تطبیقاً	$\left. \begin{array}{l} \text{مساحه حجمیه سـک} \\ \text{تحریمی مطلوبدر .} \end{array} \right\}$
(۲) : برمتوازی المستطیلاک	» »	
(۳) : برمنشورک	» »	
(۴) : برامرامک	» »	

$$[°] \frac{1}{4}ع + ۲ \frac{2}{3}ع + ۲ \frac{1}{3}ع + ۱ = ۷$$

$$\frac{1}{4}ع (۳ + ۲ \{ ۳ + ۲ \times \frac{2}{3}ع + ۱ \}) = ۷$$

$$\frac{1}{4}ع [ ۳ + ۲ \{ ۳ + ۲ \times \frac{2}{3}ع + ۱ \} ] = ۷$$

$$\frac{1}{4}ع [ ۳ + ۲ \{ ۳ + ۲ \times \frac{2}{3}ع + ۱ \} ] = ۷ \text{ اولور .}$$

§ ۳۰ ب)

مسائل

(۱) : قاعدتینک برر ضلعلری ۵ و ۳ متره و ارتفاعی ۱۲ متره اولان  
اهرام ناقص مربیعینک مساحه حجمیه سنی حساب ایتمک ؛

(۲) : قاعده فوقانیسی ۱۵ م<sup>۲</sup> ، تحتانیسی ۱۲ م<sup>۲</sup> ، حجمی ۱۴۰ م<sup>۳</sup> اولان  
براهرام ناقصک ارتفاعی حساب ایتمک ؛

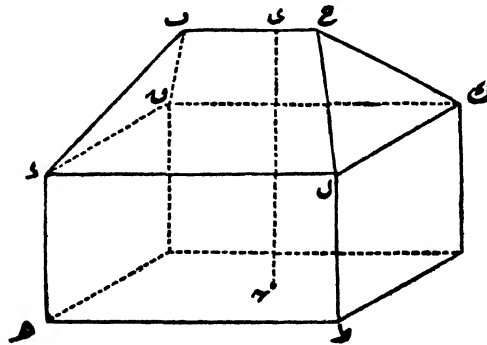
(۳) : ارتفاعی ۱۸ م اولان وقاعدتینی ایکی مسدس منتظمدن عبارت  
بولان بر اهرامک ( قاعدتینک برر ضلعلری  $\frac{۲}{۳}$  نسبتنده و بیو-

کذک برضلی ۶ م اولدیفنه نظراً ) مساحه حجمیه سنی حساب ایتمک ؛

(۴) : ( شکل — ۴۳ ) ایله کو-تریلان بر جسمک مساحه حجمیه سنی حساب

ایتمک [ ک د ط ه = متوازی المستطیلان ، ح ک د منشور مثلثی ناقص ؛ ط ه = ۱۵ ،

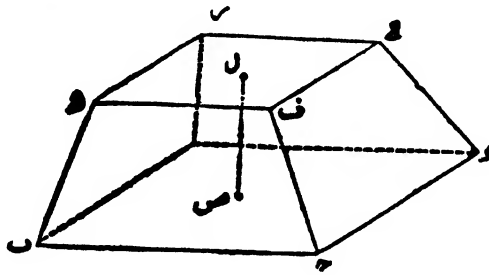
ه د = ۷٫۵ ، ک ل = ۸ ، ح ب = ۷ ، ی ۷ = ۶ ، ۱۳٫۵ = متره اولسون ]



شکل ۴۳



(۵): یوللرک تممیری ایچون بونلرک کنسارلرنده محافظه ایدیلان قیرمه طاشلرک کوستردکلری شکلده کی اجسامک [ شبه اهرام ناقص مستطیلینک ] یعنی یان وجهلری شبه منحرف متساوی الساقیندن وقاعدتینی مستطیللردن عبارت اولوب (شکل-۴۴) ایله کوستریلن اجسامک ۷ مساحتی حمیمه لرینی ویرن افادهک ، یا ه و ط مستویسی واسطه سیله جسم مذکور ایکی منشور مثلثی ناقصه بالتفریق (۱۳) و یا خود طوغریدن طوغری به (۹) افاده سی قوللانیله رق و



شکل ۴۴

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ط} = \text{ر} = \text{ط} = \text{و} ، \text{ح} = \text{ر} = \text{و} \\ \text{ط} = \text{ر} = \text{و} = \text{س} ، \text{ح} = \text{ف} = \text{ن} \\ \text{ل} = \text{ع} \end{array} \right. \quad \text{فرض ایدیلرک}$$

$$\text{ع} = \frac{1}{4} \{ \text{و} = \text{ر} + \text{و} = \text{ن} + \text{و} = \text{ن} \} \quad \text{اولدیفنی استخراج ایتک مطلوبدر .}$$

اولدیفنی استخراج ایتک مطلوبدر . — ف، ح، ط، ع، و، ه ضلع مجسملرینک استقامت اوزره اخراجی عینی برنقطه ده تلاق ایدرسه جسم مفروض براهرام ناقص اولوب

$$\frac{\text{و}}{\text{و}} = \frac{\text{ن}}{\text{و}} \quad \text{اوله جفندن} \quad \text{ع} = \frac{1}{4} \{ \text{و} = \text{ر} + \text{و} = \text{ن} + \text{و} = \text{ن} \} \quad \text{اولورکه (۱۰)}$$

دستورنده کی ۷۰۷۰۷۰ یرینه مساویلری اولان و، ر، ن، و، ح، ط، ع، و، ه وضع اولنقلده استحصال اولور .

# در بنجی فصل

اسطوانه — مخروط — کره

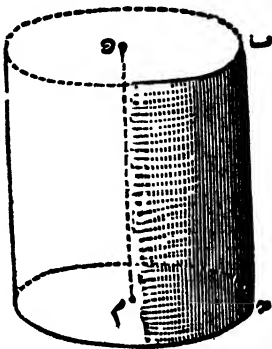
باب اول

مبحث اسطوانه

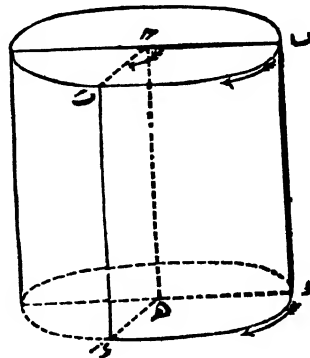
§ (۳۱)

تعريفات

(شکل-۴۵) بر مستطيلک [ب ح د ا] ضلعارندن بری [ا ب] محورا اعتبار  
اوله ورق بونک اطرافنده دوری ویاخود (شکل — ۴۶) بر نهایی بر محیط



شکل ۴۶



شکل ۴۵

دائرہٴ ہر نقطہ سنہ طوقونہرق ہر وضعیتدہ کندینہ موازتا و سطح دائرہ عموداً بر قسم مستقیمک [ب ح] حرکتی تصور اولنسون: مستطیلک، محور موازی اولان ضلع دیگرى [ب ء] ویا قسم مستقیمک کندیسى «اسطوا دورانیہ» تعبیر اولنان بر شکلک {۲۱، ۱ §. ۵} سطح مستدیرنى و مستطیلک ضلعین باقینى اسطوانہٴ دائرہٴ شکلندہ {۲۱، ۱ §. ۵} قاعدہ لرینى وقد مستقیمک دیگر نہایتى قاعدتیندن برینک {۱۴، ۱ §. ۵} محیطى و مستطیلک سطحى {۲۴، ۱ §. ۵} جسم اسطوانہٴ یى تولید ایلر. مستطیلک تا: اولان ضلعنہ «محور»، سطح مستدیرنى تولید ایدن ضلع مقابله ویا محیہ دائرہٴ طوقونہرق حرکت ایلان قسم مستقیمہ «مولد» و قسم مستقیمہ طوقونہٴ دائرہٴ «موجہ»، قاعدتینک مرکزلى بیننہ موصول «محور» مستقیمنہ «محور» تسمیہ اولنور.

بر اسطوانہٴ دورانیہ، یان وجہلى غایت اکسز و عددى نامتہ اولان بر منشور قائم کجی تلقی ایدیلہ بیلور. بو حالده عدد اضلاعى نامتہ بر شکل منتظمندن عبارت اولہجق اولان بر قاعدہ سنک نصف قطر قائمى خارجاً مرسوم دائرہٴ نصف قطرینہ و محیطى مذکور دائرہٴ محیہ منطبق اولور.

اشبو دائرہٴ نصف قطرى س و اسطوانہٴ محورینک طولى ع، منہ متصورک یان وجہلى محدود فرض اولاندیقنہ نظراً بر قاعدہ سنک برضا ب و عدد اضلاعى و نصف قطر قائمى س ایلہ ارانہ اولندقدہ: منشور حجمى {۲۳ §. ۵} = ع . ے اولوب {۱۲۰ §. ۵} ے =  $\frac{1}{4}$  س . ب. اولدیفندن منشورک حجمى = ع  $\times$   $\frac{1}{4}$  س . ب. و بولنور.

ایمدى و اعظم نامتہاى اولنجہ ب اصغر نامتہاى اولہجفندن غایہ منشور اسطوانہٴ منقلب اولہرق س = س . ب . ے = ۲ س اولند

محاوره وضع ايديلور و { ۲۳ ، ۱۰ } و تنيه { نظر مطالعه به آلنورسه :

اسطوانه دورانيه نك مساحه حجييه سي  $\pi r^2 \cdot c$  ..... (۱۶)

سطح مستديري  $\pi r^2 \cdot c$  ..... (۱۷)

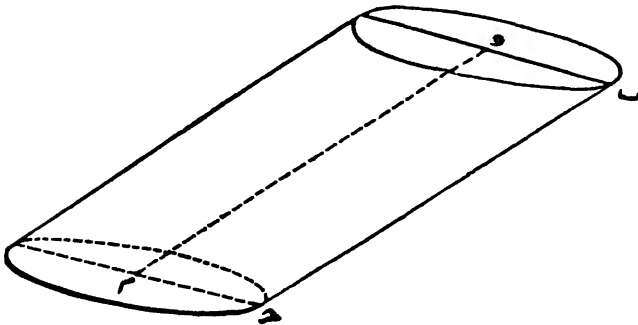
خارجي سي  $\pi r^2 (r+c)$  ..... (۱۸)

بولنور .

### تنيهات

(۱) [غ.م.]: (۱۴) ويا (۱۵) افاده لرنده ، ، ، ، ، ، ايله ، ص يرينه  
جسم ، اسطوانه اولديغه نظرآ مساويلري اولان  $\pi r^2$  قونولورسه ( ۱۶ )  
نومرولي دستورك استحصال اولنه جي كوريلور .

(۲): قسم مستقيم متحرك ، طوقونديني دائره مستويسنه مائلاً واقع  
اولورسه (شكل - ۴۷) قاعده لري دائره اولان مائل براسطوانه تولد ايلركه  
عيني قاعده وارتفاعده بولنان اسطوانه دورانيه به { ۲۱ } معادل اوله -  
جفتدن مساحه حجييه سي كذلك  $(\pi r^2 c)$  . مساوي اولور .



شكل ۴۷

(۳) : اسطوانه دورانيه نك برمولد استقامتمده انكشافى برضلى ارتفاع ويا مولد اسطوانه وديكر ضلى اسطوانه نك ايكي قاعده لردن برينك محيطه مساوى اولان برمستطيلدن عبارت اولور .

§ (۱۰۳۱)

## — وظائف —

- ( ا ) : ارتفاعلى مساوى اولان اسطوانه لرك نه ايله متناسب اولديغلك ؛
- ( ب ) : قاعده لرينك نصف قطرلى مساوى اولان اسطوانه لرك نه ايله متناسب اولديغلك ؛
- ( ج ) : ( ا ) وظيفه سنده فرض اولسان اسطوانه لرك اولاً : سطح مستديرلى ؛ ثانياً : سطح خارجى پيندهكى نسبتك نه اولديغلك ؛
- ( د ) : ( ب ) وظيفه سنده فرض اولنان اسطوانه لرك اولاً : سطح مستديرلى ؛ ثانياً : سطح خارجى پيندهكى نسبتك نه اولديغلك ؛
- ( هـ ) : قاعده سنك نصف قطرى درت دفعه بيوديان اسطوانه نك حجمى اولكنك قاج مثلى اولديغلك ؛
- ( و ) : ارتفاعى تنصيف ايديلن بر اسطوانه نك حجمى نه اوله جفك ؛
- ( ز ) : قاعده لريك نصف قطرلى وارتفاعلى  $\frac{1}{4}$  سبتنده اولان ايكي اسطوانه نك پيندهكى نسبتك ؛
- ( ح ) : ( هـ ) وظيفه سنده فرض ايديلن ايكي اسطوانه نك سطح مستديرلى و خارجى نه نسبتده بولنديغلك اراشسى ؛
- ( ط ) : ( ح ) وظيفه سنك ( و ) اسطوانه لريته نظراً ايفاسى ؛

ی) : (ح) وظیفه سنك (ز) اسطوانه لرینه نظراً ایفاسی ؛  
 ك) : اسطوانه حجنك (۹) نومرولی افاده به نظراً تحریرسی مطلوبدره .

§ (۳۱، ب)

### مسائل

- ۱) : قاعده لری مقوادن ، سطح مستدیری عادی کاغددن عبارت اولق اوزره براسطوانه دورانیه تشکیلی مطلوبدره .
- ۲) : ارتفاعی ۴۰۵۰ م ، قاعده سنك نصف قطری ۰۰۷۵ م اولان براسطوانه نك مساحه حجمیه سی حساب ایتك ؛
- ۳) : حجمی ۲۹ م ، قاعده سنك نصف قطری ۰۰۵۰ م اولان براسطوانه نك ارتفاعی بولق ؛
- ۴) : ارتفاعی ۳۰۰۵ م ، قاعده سنك نصف قطری ۰۰۲۵ م اولان براسطوانه دورانیه نك اولاً : سطح مستدیری ؛ ثانیاً : سطح خارجیه سی بولق ؛
- ۵) : سطح مستدیری ۲ م ، ارتفاعی ۳ م اولان براسطوانه دورانیه نك مساحه حجمیه سی حساب ایتك ؛
- ۶) : اوج متره ارتفاعده وقاعده سی بش متره محیطنده اولان اسطوانه شکلهده بر حوضك قآچ لیتره صو استیعاب ایدم جکنی حساب ایتك مطلوبدره .
- ۷) : شبه اهرام ناقص مستطیلی شکلهده و ۳۰۵ م ارتفاعده بولنان بر طاش بیغینك { الت قاعده سنك ابعادی {  $\begin{Bmatrix} ۸ \\ ۵ \\ ۳ \end{Bmatrix}$  } اوست {  $\begin{Bmatrix} ۷ \\ ۶ \\ ۲ \end{Bmatrix}$  }

اولدینی معلومدر . یومیه اون ساعت جالیشان وبش دقیقه  
ظرفنده ال عربیه سیله ۴۰ دَم قسمی قالدیره بیلن برعمله یه .  
یومیه سی • فروش حسابیه مذکور طاش ییغینک قالدیرلمسی  
ایچون قاج غروش ویرمک لازمدر ؟

۸) : ۱۰ م قطرنده واسطوانه شکننده برحوضک ۵۰ م صواستیاب  
ایده بیلیمک ایچون، عمقی قدر اولقی لازم کلیر ؟

۹) : بر مستطیلک بر کره (ب) ضلع کبیری، بر کرده (ح) ضلع صغیری  
اطرافنده دوراندن حاصل اولان ایکی اسطوانه نك اولاً : جملری ؛  
ثانیاً : سطح مستدیرلری ؛ ثالثاً : سطح خارجیلری بیننده کی  
نسبتک تمینی و مستطیل یرینه مربع فرض اولدینی حالده  
مسئله نك حلی مطلوبدر .

۱۰) : اسطوانه شکننده بر دیرک قطرلی ۱۰۵۰ م و ارتفاعی ۷۰۴۰ م  
اولوب سطح مستدیرینک بر متره مربعی سطحنک بویانمسی ایچون  
۱۰ غروش ویرلدیکی حالده مصارف کامله نك مقداری حساب  
ایتمک مطلوبدر .

۱۱) : جینقودن معمول اسطوانه شکننده بر صو خزینه سنک نصف  
قطرلی ۱۰۲۷ م و ارتفاعی ۴۰۷۵ م اولوب سطح مستدیرینک  
بر متره مربعی ۸۰۲۵ غروش و قاعده سطحلرینک بهر متره  
مربعی ۱۴ غروش صرفی ایله اعمال ایدلدیکی حالده جمماً یکون  
قاج غروش ویرمک لازم کلیر ؟

۱۲) : جینقودن معمول اسطوانه شکننده بر حوض ۵۰۰۰ لیتره  
صو استیاب ایتدیکی و عمقی ، قاعده سی نصف قطرینک ضعی  
اولدینی معلوم ایکن عمق مذکوری حساب ایتمک ؛

- (۱۳) قاعده سی محیطی ۱۴ دم ، ارتفاعی ۶ دم اولان براسطوانه نك  
انكشافی رسم ایتك ،  
(۱۴) ۱۰۷۲ م قطرنده ۰۰۴۸ م تختنده بولنان بر دكرمن طاشنك  
مرکزنده واسطوانه شكلنده کی ثقبه ۰۰۱۱۵ متره نصف قطرنده  
اولوب بردستره مكبی طاشك ثقاتی ۲۰۷۶۰ كيلو غرام اولدینی  
معلوم ایکن مذکور طاشك ثقاتی حساب ایتك مطلوبدر .

## باب ثانی

### مبحث مخروط

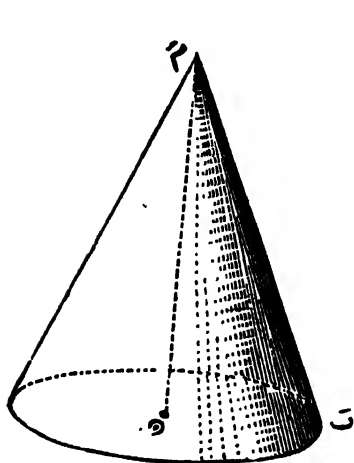
§ (۳۲)

### • تعریفات •

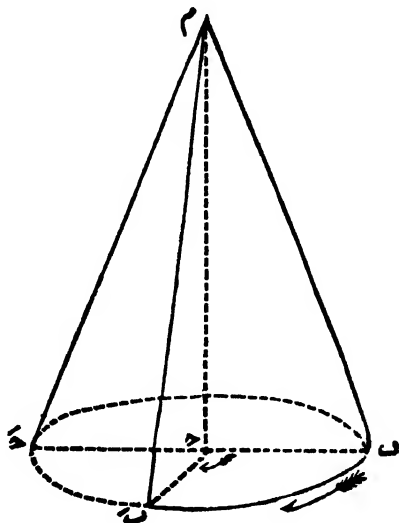
(شكل — ۴۸) بر مثلث قائم الزاویه نك [م-ح] ضلع قائملرندن بری  
اطرافنده دوری و یاخود (شكل — ۴۹) بر دائره نك مرکزندن سطحه  
اقامه اولتان عمودك اوزرنده واقع بر نقطه دن كچمك و دائما محیط دائره یه  
طوقونمق اوزره بر مستقیمك [م-ب] حرکتی تصور اولنسون . مثلث قائم  
الزاویه نك و تر قائمه سی و یا مستقیم مفروض د مخروط دورانی ، تعبیر اولنان  
شكك سطح مستدیرینی و مثلك ضاع متباقیسی ، محیط دائره شكلنده  
«قاعده سنی» و مثلك سطحی جسم مخروطی تولید ایلر .  
مثلث قائم الزاویه نك و تر قائمه سنه و یا مستقیم مفروضه «مولده» و مستقیمك



حرکتی توجیه ایدن محیط دائره به « موجه » ، و تر قائمه نك و یا مستقیم مفروضك ثابت نقطه سنه « رأس » و رأس ايله قاعده نك مرکزی بیننه موصول مستقیمه « محور »، رأسدن قاعده به تنزیل اولنان عموده « ارتفاع » دینلور.



شکل ۴۹

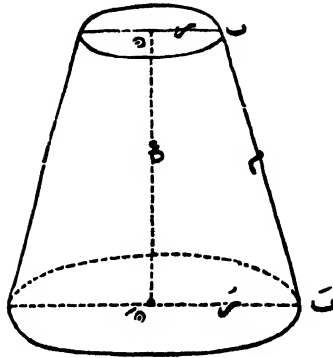


شکل ۴۸

بر مخروط دورانی: قاعده سی، ضلع لرینك هر بری اصغر و عددی اعظم نامتاهی اولان بر شکل منتظم دن و وجه لری نامتاهی بچوك قاعده لره مالك اعظم نامتاهی عددده مثلث متساوی الساقینلردن عبارت بر اهرام کبی تلقی ایدیله بیلور.

شکل منتظم متصورك نصف قطر قائمی ر، بر ضلعی ب و عدد اضلاعی ۵، و مخروطك ارتفاعی ع، مولدی م وقاعده سنك نصف قطری ر فرض اولنورسه مذکور اهرامك حجمی  $\{25\} = \frac{1}{3} \cdot ع \cdot ۱۲.5.۵$  اولوب  $\{۱۲.5.۵\}$

۵.  $\frac{1}{4} \pi \cdot r \cdot b$  اولدیفندن اهرامك حجمی  $= \frac{1}{4} \pi \cdot r \cdot c \times \frac{1}{4} \pi \cdot r \cdot b$  بولنور .



شكل ۵۰

ایمدی ۵ اعظم نامتاهی اولنجه ب اصغر نامتاهی اوله جفندن فایده اهرام ، مخروطه منقلب اوله رق  $r = r + b$  ۵  $= 2 \pi r$  اولمغله محاورینه وضع ایدیلور و {۱، ۲، ۵} و تنبیه دخی نظر مطالعیه آله رق اصلاحات لازمه یاییلورسه :

مخروط دوراینك مساحه حجمیه سی  $= \frac{1}{4} \pi r^2 c$  ..... (۱۹)

« « سطح مستدیری  $= \pi r m$  ..... (۲۰)

« « خارجیه سی  $= \pi (r + m)$  ..... (۲۱)

بولنور .

الحاصل ارتفاعی ع ، مولدی م ، قاعدینك نصف قطر لری  $r$  ، اولان و وجهلری نامتاهی اصغر شبه منحرفلردن عبارت بر اهرام ناقص کبی تصور اولنان بر مخروط ناقص دوراینك (شكل - ۵۰) کذلک ملاحظات سابقه عطفاً مساحه حجمیه سی  $= \frac{1}{4} \pi (r^2 + r r' + r'^2) c$  ..... (۲۲)

سطح مستدیری  $\pi (r + r') m$  ..... (۲۳)

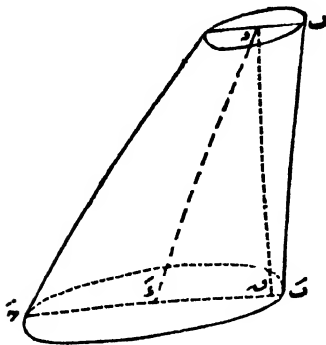
« خارجیی  $\pi \{ r(r+m) + r'(r'+m) \}$  ..... (۲۴)  
بولنه جنی سهولته اكلاشیلور .

نتیجه: (۱۹) نجی دستورك (۱۶) دستورہ نسبتندن عینی قاعده وار قاعده  
بولنان مخروط، اسطوانه ك نلته مساوی اولدینی تبین ایلر .

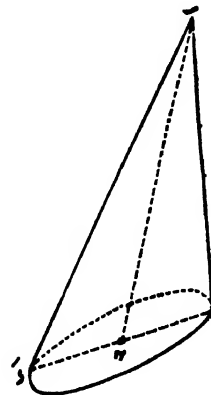
§ (۳۳)

### ❖ تنبیهات ❖

(۱): بالاده قسم مستقیمك بکدیکی فرض اولمش اولان ثابت  
قطعه سطح دائرهك مرکزندن اخراج اولنان عمودك اوزرنده بولمئزسه  
قاعدهسی دائره اولق اوزره بر مخروط مائل تولد ایلر وهر ایکی قاعدهسی  
دائره اولدینی حالده مرکزلی بیننه موصول مستقیم دائره لره عمود اولمئزسه



شکل ۵۲



شکل ۵۱

مخروط ناقص مائل حصوله کلیه. (شکل — ۵۲۰۵۱) هر ایکسینک مساحت حجمیه سی (۱۹) و (۲۲) نومرو ایله کوسترین افاده لره تطبیقاً بولنه جی {۲۱} ماده سی ملاحظه ایدیلرک حکم اولنور.

(۲) [ع.م.]: (۴) ویا (۱۵) نومرولی افاده لرده، اشکال مجسمه مخروط اولدیقنه نظراً، م. م. ویا، م. م. یینه مساوی لری وضع اولنور سه ۱۹ و ۲۲ مساواتی استحصال اولدینی کوریلور.

(۳): اسطوانه و مخروط لری قاعده لری محیط دائرة اولیوب ده باشقه جنس منحیدن تشکل ایتمش ایسه مساحت حجمیه لری و دورانی اولدقلری تقدیرده سطح مستدیرلری ایچون کذلک بالاده کی دستورلر قوللانیلوب یالکز دائرة و محیط دائرة یینه منحنی معلومک محیط بولندینی مساحت سطحیه یی و طولنی وضع ایتمک اقتضا ایدر.

(۴): مخروط دورانینک هر مولدی عینی اولدیغندن سطح مستدیرینک برمولد استقامتمده انکشافی نصف قطری مولد مذکور دن عبارت اولمق و قوسی مخروط دورانینک قاعده سی محیطنک طولنه مساوی بولمق اوزره بر. قطاع دائرة دن عبارت اولور. { (۲۰) نجی دستور ایله ه. س. ۱۲۰، (۲)، تنبیه مقایسه ایدلسون }

§ ۱۰۳۳

### — وظائف —

- ( ا ) : ارتفاع لری مساوی اولان مخروط لری نه ایله متناسب اولدیفنک؛  
 ( ب ) : قاعده لری نصف قطر لری مساوی اولان مخروط نه ایله متناسب اولدقلری نه ارأه سی مطلوبدر.



دورانينك اولاً: سطح مستديرينك ، ثانياً: سطح خارجيسنك  
مساحه سطحيه سنى حساب ايتك مطلوبدر .

٤) : ٥ سم قطرنده ، ٨ سم ارتفاعده بر مخروط دورانى ، قاعده سنى  
موازی اوله رق بو قاعده دن ٥٠٠٥ م مسافده بر مستوی ايله قطع  
ايدلديكى حالده حصوله كلن مخروط ناقص دورانينك بر مولد  
استقامتنده انكشافى مطلوبدر .

٥) : الت ، اوست قاعده لرینك نصف قطر لری ٨٠ م ٥٥ م ٤٥ م و ارتفاعی  
١٧٠ م اولان بر مخروط ناقصك مساحه حجميه سنى ، سطح  
مستديرینى و سطح خارجيسنى حساب ايتك ؛

٦) : سطح مستديرى ٣٢.٣٧ م و ارتفاعی ٣٠.٩ م اولان بر مخروطك  
مساحه حجميه سيله سطح خارجيسنى حساب ايتك ؛

٧) : قاعده سنك محیطی ايله مولدی ايكيشر دسيمتره اولان مخروط  
دورانينك مساحه حجميه سنى ، سطح مستديرینى و سطح خارجيسنى  
حساب ايتك ؛

٨) : قاعده سنك قطريله ارتفاعی برر دسيمتره اولان مخروط دورانينك  
سطح مستديرینى حساب ايتك ؛

٩) : بر دكرمن بناسنك قطرى ٦٠.٧٥ م ، ارتفاعی ٥٠.٩٠ م اولوب  
٢٠.٨ م ارتفاعه قدر اسطوانه وانك يوقا ريسى مخروط شكلنده در .  
قاعده سى مستثنا اولقى اوزره سطح خارجيسنى و مساحه حجميه  
سنى حساب ايتك ؛

١٠) : ١١٥ م قطرنده سو ايله مملو اسطوانى بر قابك دروننه بر آره وود  
غطس ايدلديكى و بو حالده صويك تسويه سى ١٧ م ترفع ايتديكى  
[ وهر قيسى بر جسم مغلوس طرفدن چيقاريلان صويك مقدارى

جسم مذکورک حجمه مساوی اولدینی [ معلوم ایکن آرمودک  
حجمی حساب ایتمک ؛

( ۱۱ ) : ۰۰۵۲ متره ضامنده بولان بر مکبک داخلنه قاعده سنک قطری  
۰۰۴۳ م و ارتفاعی ۰۰۵۱ م اولان بر مخروط وضع اولدینی  
حالده آرده قالان بوشلغک حجمی حساب ایتمک ؛

( ۱۲ ) : حجمی ۱۰۰ م، ارتفاعی قاعده سنک نصف قطرینه مساوی اولان  
بر مخروط مولدینی، ارتفاعی، قاعده سنک نصف قطرینی حساب  
ایتمک ؛

( ۱۳ ) : بر مخروط ناقص ایله بر اسطوانه نك اتحاددن حاصل  
اولان بر خونینک حجمی و سطح خارجینی حساب

ایتمک مطابقدر .  

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{مخروط ناقصک ارتفاعی} = ۰۰۱۶ \\ \text{قاعدتینی} = \left\{ \begin{array}{l} ۰۰۱۹۵ \\ ۰۰۱۶ \end{array} \right\} \\ \text{اسطوانه نك ارتفاعی} = ۰۰۰۷۷ \end{array} \right\} \text{متره}$$

فرض اولمشدر ؛

( ۱۴ ) : مخروط ناقص شکلنده  

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قاعده فوقانیسی} = ۰۰۴۲ \\ \text{تحتانیسی} = ۰۰۳۸ \end{array} \right\} \text{متره}$$
 بولان بر قبابک

اولدینی حالده ۳۰ لیتره صو استیعاب ایده بیلیمک ایچون ارتفاعی  
تقدر اولمق لازمد ؛

( ۱۵ ) : اسطوانه شکلنده ، ۱۲ م عمقنده و ۱۰۴۰ م نصف قطرنده بر  
قویونک  $\frac{۲}{۳}$  مقداری صو ایله طولودر . بر عمله مخروط ناقص  
شکلنده بر قوغه ایله صویی بوشالتمغه مأمور اولمشدر . صویک قوغه  
دروننده کی ارتفاعی ۰۰۲۰ اولوب قوغه نك قاعده تحتانیسی  
۰۰۱۸ م وقاعده فوقانیسی ۰۰۲۴ قطرنده در . مرقوم عمله نك  
یومیه ۱۵ غروش اجرتله ۸ ساعت چالیشدیغی و ۲۰ ده بر قوغه

صوچیقاردینی وباشقه طرفدن قویویه صوکلدیکی معلوم ایکن ایشنی  
اکال ابتدیی وقت آلهجفی تقدیر اوله جقدر؟

(۱۶) : حجمی ۱۲ م<sup>۳</sup> ، ارتفاعی ۳۰۷۵ م اولان اسطوانه نك قاعده سنك  
قطرینی حساب ایتك .

(۱۷) : سطح مستدیری ۳ م<sup>۲</sup> ، مولدی ۱۰۵ م اولان مخروطك حجمینی  
بولق ؛

(۱۸) : اسطوانه شكلنده برقله نك نصف قطر داخلیمی ۱۰۳ م دیوارینك  
مساحه حجمیه سی ۹۵ م<sup>۲</sup> و منحنی ۰۰۵ م اولدینی حالده ارتفاعی بولق  
مطلوبدر .

### باب ثالث

### مبحث کره

(۳۴ §)

### تعریفات

(۱) : بر نصف محیطك كندی قطری اطرافده دورانندن تولد ایدن  
شكله « کره » و بونك دائراً مادار محاط اولدینی سطح منحنیه « سطح  
مستدیر کره » دینلورکه هر نقطه سی « مرکز » دینلن داخلی بر نقطه دن  
مساوی بعددهدر .

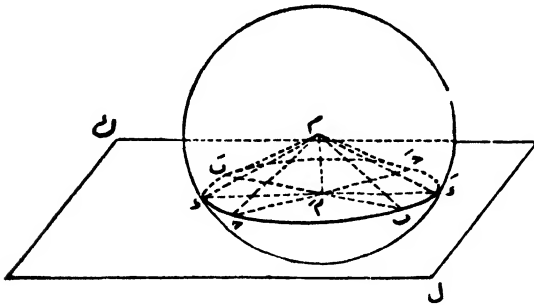
(۲) : مرکز ایله سطح مستدیر کره نك كافه نقاطنه وصل اولان اشبو



- ایجاد متساویه نك هر برینه « نصف قطر كره » تعبیر اولور .
- (۳) : نصف قطر لری مساوی اولان كره لر تماماً یکدیگرینه منطبق  
اوله ییله جک لرندن بر برینه مساویدر لر .
- (۴) : مرکز كره دن كجوب كره سطح مستدیرینه منتهی اولان مستقیمه  
« قطر كره » دینلور .

### § ۱۰۳۴

دعوی : هر مستوی نك كره ایله فصل مشترکی [ مقطعی ] بردآره در .  
مثلاً ( شکل — ۵۳ ) ( ك ل ) مستوی سنك م كره می ایله حاصل



( شکل ۵۳ )

ایستدیکلی ب ح و ب ح و  
فصل مشترک نك دائره  
اولدیفنی اثبات ایتك  
ایچون م نقطه سنندن  
( ك ل ) مستوی سنه م م  
عمودی اقامه واشبو  
عموددن كچمك اوزره  
برطاقم مستوی لر فرض

ومذکور مستوی لرك ( ك ل ) مستوی سیله حاصل ایده جکی م م ، م ح ،  
م و ، ..... مثلاً فصل مشترک لرك سطح مستدیر كره بی قطع  
ایستدیکلی ب ح و ، ..... نقطه لر ایله م بیننی وصل ایده لم .  
م م ل ( ك ل ) اولدیفنی جه تله { ۲ ، ۳ } موقعندن كچن م م ،  
م ح و ، ..... کبی بالجمله مستقیماره دخی عمود اولور .

ایمدی ب، ه، و، ی، ..... نقطه‌لری کره‌نک سطح مستدیری  
 اوزرنده بولمغله : { § ۳۴ ، (۲) } ب م = م > م = م و = م ب م .....  
 اولوب حاصل اولان م م ب م م م م م م م م م ..... مثلث قائم  
 الزاویه‌لری { § ۲۷ . ۵ (۲) } مسای و بناءً علیه م ب = م م >  
 = م و ..... اولدیقندن ب > و ب > و م قیطی ، مرکزی م  
 اولوق اوزره برداره اولمش اولور .

تفیه : مستوی مفروض مرکز کردهن بکرسه مقطی : نصف  
 قطری، کره‌نک نصف قطرینه مسای اولان برداره اوله‌جفی آشکاردر .

### نتایج

- (۱) : م مرکز کردهن مستوی قاطعه تنزیل اولنان عمود مقطع  
 دائره‌وینک مرکزندن بکیر .
- (۲) : مقطع مرکزیه م مرکز بینی وصل اولنان مستقیم مقطع  
 مذکوره عمود اولور .
- (۳) : مقطع مرکزندن اقامه اولنان عمود مرکز کردهن بکیر .

( § ۳۴ ، ب )

### تعریفات

- (۱) : بر مستوی کره ایله مقطی اصغر نامتناهی اولورسه  
 «مستوی مماس» نامی آیر . بوحالده مستوی ایله کره‌نک یالکز  
 بر مشترک نقطه‌لری واردر . مرکز کردهن اشبو مستوی به تنزیل اولنان

عمود  $\{ \S ۱۰۳۴ ، نتیجه (۱) \}$  کوره نقطه تماسدن و نقطه تماسده  
مستوی به اقامه اولنان عمود  $\{ نتیجه (۲) \}$  به نظراً مرکز کردهدن کجر .

(۲) : مرکز کردهدن کچن دائره نك نصف قطری (شکل—۵۳)  $\sim ۲۲ =$   
منلو بر مثلث قائم الزاویه نك وتر قائمه سنه مساوی اولدیغندن دائره مذکوره  
مرکز کردهدن کچمیان بالجله دوائر سائر نك هر برندن بیو کدر . بوکا مبنی  
مرکز کردهدن کچن دائره لره « کره نك دوائر عظیمه سی » و مرکز کردهدن

کچمیانلره « کره نك دوائر صغیره سی » تسمیه اولور .

(۳) : بر دائره عظیمه و یا صغیره عمود اولان قطر کره نك ایکی  
نهایت نقطه سنه مذکور دائره نك « قطبری » دینلور . بر برینه موازی  
اولان دائره لرك قطبری عینیدر . عینی قطبه مالک اولان دائره لر  
« دوائر متوازیه » و قطب نقطه لرندن کچن دوائر عظیمه به « نصف النهار  
دائرة لری » نامی و بریلور . نصف النهار دائره لره دوائر متوازیه یکدیگری  
عموداً قطع ایدر لر .

(۴) : دوائر عظیمه عینی نصف قطره اولدیغندن یکدیگری نه  
مساویدر . دوائر عظیمه متلاقیه نك فصل مشترک لری ، مرکز مشترک لرندن  
کچدیگندن ، یکدیگری تنصیف ایدر لر .

(۵) : هر دائره عظیمه کربی سطحاً و حجماً ایکی مساوی قسمه  
تقسیم ایدر . چونکه مذکور قسملر یکدیگری نه تماماً منطبق اولور .

(۶) : سطح مستدیر کره اوزرنده واقع کینی ایکی نقطه ایله  
مرکز کردهدن  $\{ \S ۱ ، (۵) \}$  دائماً ویا لکز بر مستوی کچه جکندن مذکور  
ایکی نقطه دن دائماً ویا لکز بر دائره عظیمه کجر .

(۷) : سطح مستدیر کره اوزرنده واقع کینی اوج نقطه دن §۱.۵.  
(۵) { دائماً ویا لکز بر مستوی کچه جکندن مذکور اوج نقطه دن دائماً ویا لکز بر دایره کچر .

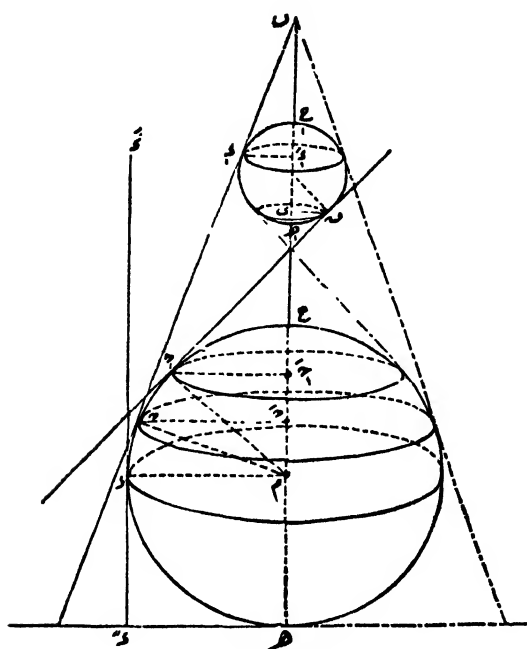
(۸) : ایکی دایره عظیمه قوسی آره سنده کی « زاویه کرویّه » .  
مذکور قوسلرک نقطه تلاقیلرندن کندیلرینه رسم اولنان ایکی مماس آره سنده بولنان زاویه مستویه ایله و تعیر دیکرله قوسلرک عائد اولدقلری ایکی دایره عظیمه مستویسینک مقیاس زاویه سیله تقدیر اولنور .

(۹) : بر مستقیم ، کره سطح مستدیرینی یالکز ایکی نقطه ده قطع ایلر . چونکه اشبو مستقیمدن بر مستوی اصرار ایدیله بیلوب مستویسینک کره ایله فصل مشترکی { § ۱۰۳۱ } دایره اولمغله بو دایره نك ، سطح مستدیر کره اوزرنده بولنان محیطی مستقیم واسطه سیله { § ۱۰۶۰ ، تنیه } یالکز ایکی نقطه سنده قطع ایدیله بیلور .

(۱۰) : کره ایله یالکز بر نقطه سی مشترک اولان مستقیمه « کره نك مستقیم مماسی » دینلور . اشبو مستقیم مماس ، کندیسيله مرکز کره دن کچن مستویسینک کره ایله مقطعی اولان دایره عظیمه به دخی مماس اولدیغندن مرکز کره ایله نقطه تماس یئنه وصل اولنان مستقیمک مستقیم مماسه عمود اولدینی و دایره عظیمه داخلنده اولقی اوزره نقطه تماسده مستقیم مماسه عمود اولان مستقیمک مرکز کره دن کچدیکی اکلایشیلور .

(۱۱) : ( شکل - ۵۴ ) ح ، ح ، ح ، ح نصف دایره لريله ۱ ۱ ۱ ۱

۷ مماس مشترک‌رینی و (ب) به موازی اولان و کایله، عمود بولان  
 و مماس‌لرینی نظر مطالعه به آله. ح ح نصف دایره لرینک





دوائر عظيمه نك ثابت كچوك قوسلردن تركب ايتيش كبي نظر مطالعه يه آتد  
جفتدن بر دائره عظيمه محيطك، ايكي نقطه سي آره سنده بولنان و نصف  
محيطندن كچوك اولان بر قوسي، سطح مستدير كره اوزرنده مذكور  
ايكي نقطه آره سته و صلي تصور ايديان سائر خطوط منحنيه نك اقصرى  
اولديني اكلاشيلور .

(۱۷) : بر مستوي، كره ي «قطعه كره»، تعبير اولنان و كره سطح  
مستديري «طاقه كره»، دنيلن ايكي پارچه يه آيبر. اكر مستوي مركزدن  
كچرسه قطعه كره لردن هر برى «نصف كره»، و طاقه لر بر «نصف  
مستدير كره»، اولور. ايكي مستوي آره سنده بولنان كره قسمنه «منطقه»،  
تعبير اولنور. بر قطاع دائره نك نصف قطر لردن برى اطرافنده دورى  
تصور اولندقد «قطاع كره»، ناهى آلان جسم تولد ايدر.

❧ كره واقسامنك مساحه لرى ❧

§ (۳۵)

اول امرده (شكل -- ۵۵) : (د م) مربعنك، (د م) قطرينك  
و (د م) ربع دائره سنك م م محورى اطرافنده دوريني تصور ايدهلم.  
اثنای دورده مذكور شكل لردن م م د مربعي § (۳۱) براسطوانه دورانيه؛  
م م مثلث قائم الزاويه سي § (۳۲) بر مخروط دوراني؛ م م ربع دائره سي  
بر نصف كره ي توليد ايدوب م م مثلثى واسطه سيله تولد ايدن و فضل





کره و فضل جسمك مقطعلری یکدیگرینه مساوی اولدینی بو وجهله تحقق ایتدیکندن {§ ۲۱} حجملری دخی بربرینه مساوی بولندینی اکلایشلمش اولور. حالبوکه عینی قاعده و ارتفاعده بولسان مخروط {§ ۳۲، نتیجه} اسطوانه نك ثانی اولغله:

$$\text{نصف کره} = \text{فضل جسم} = \text{اسطوانه} - \text{مخروط}.$$

$$\text{نصف کره} = \text{اسطوانه} - \left(\frac{1}{4}\right) \text{اسطوانه}$$

$$= \frac{3}{4} \text{اسطوانه}$$

بولنور. کره نك نصف قطری r و مساحت حجمیه سی  $\frac{4}{3}\pi r^3$  ایله کوسترلسه شکل سابقه نظرآ:

$$\text{اسطوانه نك مساحت حجمیه سی} = \pi r^2 \cdot r = \pi r^3 \text{ اولوب}$$

$$\text{نصف کره نك} = \frac{3}{4} \pi r^3 \text{ اولغله}$$

$$\frac{3}{4} \pi r^3 = \dots\dots\dots (۲۵) \text{ بولنور.}$$

تنبيه (۱): ارتفاعلری قاعده لرینك قطرینه ( $r=۲$ ) مساوی اولق اوزره بر اسطوانه و بر مخروط ایله قطری ینه ( $r=۲$ ) یه مساوی اوله رق برده کره رسم اولنسه مخروطك، کره و اسطوانه یه نسبتی

$$۱ : ۲ : ۳$$

کیدر.

(۲): کره نك قطرینی و ایله کوستروب r برینه  $\frac{4}{3}\pi r^3$  وضع ایلرسه ك

$$= \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ و} \dots\dots\dots (۲۵) \text{ بولنور.}$$

(۳۶ §

وہوۃ مستویسیلہ تشکیل ایدیلان و ارتفاعی ھ = ع دن عبارت بولنان  
قطعہ کرہ نک حجمی وہوۃ ، و مستویلری آردہ سندہ کی فضل جسمک  
حجمہ [قاعدہ لری معادل، ارتفاعلری عینی اولدیغندن] مساوی اولوب  
کے ایله کوستریلورسہ :

$$\begin{aligned} & \text{کے} = \text{فضل جسم (دو ف ح و)} \\ & = \text{اسطوانہ (د ح ح و)} - \text{مخروط ناقص (د ف و)} \text{ اولوب} \end{aligned}$$

$$\text{و} = \text{م} = \text{ھ} = \text{ر} - \text{ع} \quad \text{اولمغله}$$

$$\text{کے} = \pi \text{ر}^2 \text{ع} - \frac{1}{3} \pi \text{ع} \{ \text{ر}^2 + (\text{ر} - \text{ع})(\text{ر} + \text{ع}) \}$$

بولنور. اصلاح اولدقدہ : ارتفاعی ع اولان بر قطعہ کرہ نک مساحہ  
حجمہ سی :

$$\text{کے} = \frac{1}{3} \pi \text{ع}^3 (\text{ر} - \text{ع}) \dots\dots\dots (۲۶)$$

بولنمش اولور .

(۳۷ §

وہوۃ، ل ل مستویلری آردہ سندہ بولنان و ارتفاعی ھ = ع اولان  
منطقہ کرہ کے ، بر قاعدہ سنک ھوہ نصف قطری ب ، دیکرینک ھوہ  
نصف قطری ھ ایله کوسترلدکده :

$$\text{کے} = \text{فضل جسم (ک ی ح و ف ح ی ک)}$$



$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} - \text{مخروط ناقص (لؤلؤ ل)}$$

$$\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4} = \frac{1}{r_1} \pi \frac{1}{4} - \frac{1}{r_2} \pi \frac{1}{4} \quad (27)$$

$$\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4} = \frac{1}{r_1} \pi \frac{1}{4} - \frac{1}{r_2} \pi \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4} = \frac{1}{r_1} \pi \frac{1}{4} - \frac{1}{r_2} \pi \frac{1}{4}$$

اولوب بناءً عليه :

$$\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4} = \frac{1}{r_1} \pi \frac{1}{4} - \frac{1}{r_2} \pi \frac{1}{4} \quad (28)$$

اولش اولور .

(۲۶) نومرولی دستور نصف کره دن بیوک اولان قطعه کره لر ایچون

دخی جاری و (۲۷) و (۲۸) دستورلری عینی وجهله عمو میدر .

س = ع حائده یعنی ر نصف قطرنده بر کره نك داخلنده مرسوم

اولان و ارتفاعی (ع) . مساوی بولنان براسطوانه نك ظرفدن عبارت یوزوك

شکلنده کی جسمك مساحه حجمیه سی :  $\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4} = \frac{1}{r_1} \pi \frac{1}{4} - \frac{1}{r_2} \pi \frac{1}{4}$  اولور که نصف

قطره غیر تابع اولوب قطری ع اولان بر کره حجمه مساوی دیمکدر .

### § (۳۸)

م ق ه قطاع کره سی = قطعه کره ق ه ر + مخروط م ق ه اولدینی

شکلک مطالعه سندن اکلاشلمقده اولوب اگر ه = ع وقطاع مذکورک

مساحه حجمیه سی  $\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4}$  فرض اولنورسه :

$$\frac{1}{r} \pi \frac{1}{4} = \frac{1}{r_1} \pi \frac{1}{4} - \frac{1}{r_2} \pi \frac{1}{4} \quad \text{اولور .}$$



$$ح = ۲\pi r ع \dots\dots\dots (۳۰)$$

اولش اولور .

§ ۴۰

برينك ارتفاعى ع، ديكربينكى ع اولان ايكي طاقينك ييتشدهكى  
فضلى آيرسق ارتفاعى (ع—ع) اولان بر منطقه سطح مستديرينك مساحت  
سطحيهسى بوانه چقندن مذكور ارتفاع يعنى منطقه يي تحديد ايدن ايكي  
موازي مستوي آره سندهكى بعد ع و منطقه كره سطح مستديرى ح ايله  
كوستيلورسه

$$ح = ۲\pi r ع \dots\dots\dots (۳۱)$$

بولنور .

ع = ر حالده طاقينك سطح مستديرى بر نصف كره سطح مستديرينه  
منقاب اوله چقندن (۳۱) نجى دستور ۲  $\pi$  ر شكلى آاش اولمقله كره سطح  
مستديرينك مساحت سطحيهسى ح ايله كوسترلده :

$$ح = ۲\pi r^2 \dots\dots\dots (۳۲)$$

واشبو دستورى ح =  $\frac{۲(\pi r^2)}{\pi ۲}$  حالنه وضع ايتك ممكن اولديغندن نصف  
قطرى ر اولان كره نك دائره عظيمهسى محيطنه مساوى اولان  $\pi ۲$  ر  
افادهسى (ك) فرض اولنورسه سطح مستدير مذكور :

$$ح = \frac{ك}{\pi ۲} \dots\dots\dots (۳۳)$$

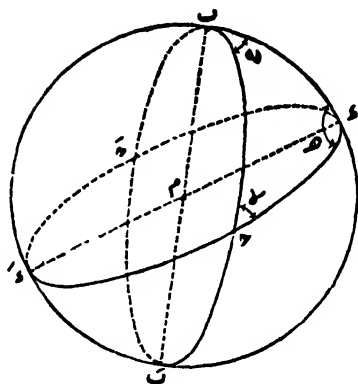
اولش اولور .

§ (۴۱) (غ.م.۰)

۲۵ : ۲۹ نومرولی دستورلر § (۴۰) { نه تطبیقاً دخی بولنه بیلور .

§ (۴۲)

ایکی نصف دائرة عظیمه آره سنده بولنان سطح کره پارچه سینه  
« دلم کره » دینلور .



شکل ۵۶

ح ایله نصف کره سطح مستدیری ، ح ایله دلم کره سطحی ؛ لا ایله  
آدلی احداث ایدن نصف دائرة عظیمه قوسلری آره سنده کی زاویه  
کوستیلورسه :

[\*] کره نك ، هر قننی بر نصف دائره نك محوری اطرافنده دورندن ، تولد  
ایله یکی معلومدر . (شکل — ۵۷) (ب) دن (س) طوغری و ب ك نصف دائره نك دورینی





$$\Delta = \frac{4 + 3 + 2 + 1}{4} \cdot \pi$$

وياخود زاوية قائمه لر مثلثاتده اولديني كبي  $\pi$  حرفيله كوسترلده كده .

$$\Delta = \frac{4 + 3 + 2 + 1}{\pi} \cdot \pi \dots \dots \dots (34)$$

بولمش اولور .

§ ۴۲، ۱۰

### — وظائف —

- (۱) : (۹) دستوريني قوللانهرق حجم كرمي بولق ،
- (ب) : » » » » قطعه كرهك حجمي » ،
- (ج) : » » » » منطقه » » » ،
- (د) : نصف قطري مختلف اولان كره لرك حجملي نه ايله متناسب اولديغلك ؛
- (ه) : عيني بركرده قطاع كره لرك حجملي نه ايله متناسب اولديغلك ،
- (و) : نصف قطرلي مختلف اولان كره لرك سطح مستديرلي ايله متناسب اولديغلك ؛
- (ز) : عيني بركرده طاقيله لر نه ايله متناسب اولديغلك ؛
- (ح) : » » » » منطقه لر » » » اراده سي مطلوبدر .

( ۴۲۵ . ب )

## مسائل

(۱) : نصف قطری ۲۰۰۵ م اولان بر کره نك مساحه حجمیه سنی حساب ایتمك مطلوبدر .

(۲) : سطح مستدیری ۵ م اولان کره نك حجمی حساب ایتمك ؟

(۳) : نصف قطرینك اوج مثلثی النان کره نك حجمی و سطح مستدیری نه نسبتده بیور ؟

(۴) : بر کره نك بش متره طولنده اولان نصف قطرینك منتصف نقطه سندن قائماً کچن بر مستوینك کره ایله حاصل ایلدیکی مقطعك مساحه سطحیه سنی حساب ایتمك ؛

(۵) : قطری اوج متره اولان بر کره ده ۱۲۵ م ارتفاعنده کی منطقه نك مساحه سطحیه سنی حساب ایتمك ؛

(۶) : بر کره منطقه سنك ارتفاعی بر متره و سطحی ۲۰۵۰ م متره اولدینی معلوم ایکن کره نك مساحه حجمیه سنی حساب ایتمك ؛

(۷) : ارضك تام بر کره اولدینی فرضنه و نصف النهار دائرة سنك ( بردائرة عظیمه سنك ) قرق میلیونده بر جزئی بر متره اعتبار اولدیفنه نظراً کیلومتره مربعی جنسندن سطح مستدیری و کیلو-متره مکعبی اوله رق حجمی بولوق مطلوبدر .

(۸) : نصف قطری ۲ م اولان بر کره نك مرکزندن اعتباراً هر قنق بر نصف قطری اوزرنده بر نقطه تعین ایتمك مطلوبدر که بونقطه دن نصف قطر مذکورده عموداً کچه جك مستوینك کره ایله مقطعی

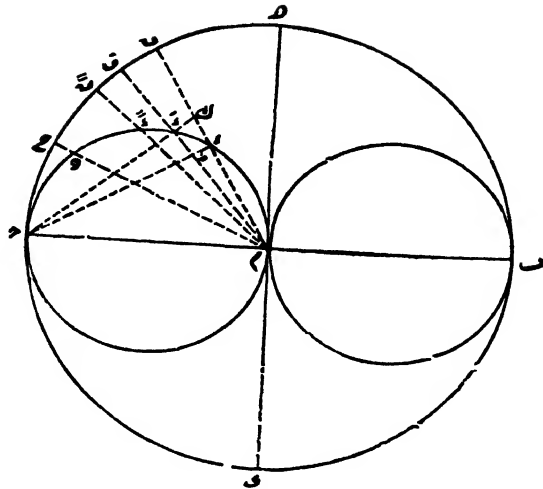


داخله غیر منتظم بر جسم وضع اوله رق صو ایله املا اولمیشدر.  
 مؤخرأ جسم قالدیر یله رق قابك طولمسی ایچون لازم ککن صویك  
 مقداری وزن اولدوقده یاریم لیتره بولمیشدر. بومعلوماته استنادآ  
 غیر منتظم جسمك حجمنی بولمق مطلوبدر .

۲۰): ارتفاعی ۹۰،۶۰ م اولان بر مخروطی . قاعده سنه موازی بر  
 مستوی واسطه سیله قطع ایندی کمز حالده ایکی حجم حصوله  
 کلیر. اشبو ایکی حجمك یکدیگری نه مساوی اولسی ایچون مستوی  
 قاطع قاعده دن نه قدر ارتفاعده بولمقی اقتضا ایدر ؟

[ ۴۳ § ] ( غ . م . ۰ )

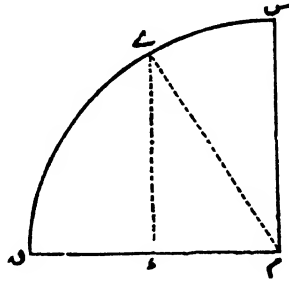
مسئله : ( شکل — ۵۸ ) بر کره نك ه ۷ ی ب دائرة عظیمه سنه قائمآ  
 واقع اولان و قاعده لرینك قطر لری ( م ب ، م ۷ ) دن عبارت اولوب م .  
 نقطه سنندن ، دائرة عظیمه مذکوریه عمودآ ، کچن قطر کره استقامتجه  
 تماس بولسان ایکی اسطوانه نك سطح مستدیر کرده دن افراز ایلدیکی درت .  
 بارچه ایله سطح مستدیر مذکورك متباقی قسمتی حساب ایتك مطلوبدر .



شکل ۵۸

مرکز کرده دن بچمک و مذکور اسطوانه لک محور لینه موازی، عمود  
و منطق اولی و یکدیگرینه ده عمود بولمق اوزره اوج مستوی تصور ایدم.  
اشبو اوج مستوی، کره بی هر برینه «نمن کره» دینان سکز مساوی  
پارچه به تقسیم ایدرکه اسطوانه لک محور لینه عمود اولان مستوینک، مذکور  
اسطوانه لک و کره ایله مقطعی (شکل - ۵۸) ده کوسترلمشدر. ایمدی هر قنی  
بر م و مستقیمندن بچمک اوزره م ه م مستوینه عمود بر مستوی تصور  
ایدم. (شکل - ۵۹) اشبو مستوینک نمن کره ایله [ (م و ه) نک فوقنده کی]  
فصل مشترکی م و ه س ربع دائره سندن و نصف اسطوانه ایله [ (م و ه) ک  
اوستنده کی] فصل مشترکی م س، و مستقیملرندن عبارت اولدینی کورلمکده در.  
(شکل - ۵۸ و ۵۹) م = م و ه م = م و م و اولدیفندن { ۵۷ و ۲۷  
قته } م ه م و م و اولغله م ه م = م و و بناء علیه قوس و ه =

قوس  $\gamma$  چ پوانور که بو واسطه ایله ثمن کره نك سطح مستدیری اوزرنده  
اسطوانه نك مقطع دند عبارت اولان منحنیك حدودینی رسم ایتمك قولایدرد  
بوندن باشقه ده  $\epsilon = \gamma$  و اولدینی آشکاردرد. اول امرده  $\epsilon$  و  $\gamma$  مستویسنه



شکل ۵۹

قائماً موضوع اولان  $\epsilon$  و  $\gamma$  سطح کره قسمتی تعیین ایدم.  $\epsilon$  و  $\gamma$  مستویسی اصغر نامتناهی اکسز تصور ایدیلن  $\epsilon$  و  $\gamma$  ،  $\epsilon$  و  $\gamma$  ، . . . . .  
پارچه لرندن و ( $\epsilon$  و  $\gamma$ ) سطح کره سی مذکور پارچه لره طائذ اولان  
 $\epsilon$  و  $\gamma$  ،  $\epsilon$  و  $\gamma$  ، . . . . . قسم لرندن ترکیب اینجکده اولدینی کورلمکده در.  
ایمدی  $\mu$  و نصف قطریله  $\mu$  مستقیمینی ک نقطه سنده قطع ایتمک اوزره  $\mu$   
مرکزی اطرافنده بر محیط دائره نك رسم اولندیغنی واشبو دائره نك محیطندن  
 $\mu$  و  $\gamma$  ی دائره عظیمه سنه قائماً بر اسطوانه سطح نك مرور ایتدیکنی فرض  
و قبول ایدم. اشبو اسطوانه نك، کره ایله [دائره صغیره شکننده حاصل  
ایتدیکی] مقطعی و ( $\mu$  و  $\gamma$ ) دائره عظیمه سی آره سنده ، ارتفاعی  
( $\epsilon$  و  $\gamma$ ) نه مساوی اولان بر منطقه کره تولد ایدوب بونك سطح مستدیری  
 $\{ \epsilon , \gamma \} = \pi$  سر .  $\epsilon$  و  $\gamma$  اولور. اگر  $\epsilon$  و  $\gamma$  زاویه سنك قیمتی  
لا ایله کوسینلورسه ک  $\epsilon$  و  $\gamma$  سطح پارچه سنك فوقنده اولان منطقه قسم نك









$$= \frac{1}{3} \pi (2 + 2 + 2) - \frac{1}{4} \pi (2 + 2 + 2) \text{ ك}$$

$$= \frac{1}{3} \pi (2 - 2) (2 + 2 + 2) \text{ ك}$$

اولوب  $2\pi$  مثلاً  $\Delta$  ایله اراؤه اولنورسه ك  $(2 - 2) = \Delta 2$  اوله جفندن.  
جسم مفروضك مساحه حجمیه سی  $= \frac{2}{3} \pi \Delta (2 + 2 + 2)$  بولنور .  
ایمدی مئائك مركز ثقات نقطه سی ط فرض اولنسون. ك ط قسم مستقیم  
ح نقطه سنده تنصیف ایدیلوب (ط ایله ح) دن (ر ر) نه ایندیریلان ط یطه ،  
ح ح عمودلرینه ع س دیرسه ك  $\{ 46 \text{ S. 5} \} 2 \text{ ع} = \frac{1}{4} \pi (2 + 2) + \text{س}$ ؛  
 $2 \text{ س} = \text{ع} + 2$  اولوب برنجی مساوات ایکی ایله ضرب و ۲ س یرینه  
ایکنجی مساواتدن مساویسی محله وضع و اصلاح اولندقه :

$$3 \text{ ع} = 2 + 2 + 2 \text{ بولمغله بو حالده جسم مفروضك مساحه حجمیه سی} = \\ \Delta \times 2 \text{ ع اولمش اولور .}$$

شمدی کیف ما اتفق بر ذو کثیر الاضلاعك ر ر محوری اطرافده کی  
دورینی دوشونه لم : رأسلرندن کندی مستویسی داخلنده اولق اوزره بر  
طاق مستقیملر رسم ایدلم که استقامت مخرجه لری ر ر محورینی عموداً قطع  
ایتسونلر . بو واسطه ایله یکدیگرینه موازی اوله رق تشکل ایدن شبه  
منحرفلرک برر قطرلرینی وصل ایلیه لم . ذو کثیر الاضلاع معلوم ، برر  
ضلعلری ر ر محورینه عموداً واقع اولان مثلثله  $[\Delta' \Delta, 0.0.]$  انقسام  
ایدر. ذو کثیر الاضلاعك دورندن تولد ایدن جسمك مساحه حجمیه سی  
ك فرض اولنورسه :

$$\dots + \epsilon \pi^2 \times \Delta + \epsilon \pi^2 \times \Delta = \epsilon$$

$$(\dots + \epsilon \Delta + \epsilon \Delta) \pi^2 =$$

اولوب ث ذو کثیر الاضلاع مرکز ثقل شدن محوره قدر اولان مسافه دالات  
ایدرسه (۶) عطفاً :

$$\epsilon = \pi^2 \theta (\dots + \Delta + \Delta)$$

و ذو کثیر الاضلاع مساحت سطح می ے ایله ارانہ اولنورسه :

$$\epsilon = \pi^2 \times \epsilon \theta \text{ بولور } .$$

تلیه : اشبو دستور. سطح دوارک برخط منکسر ایله محاط اوله جق  
برده نامتناهی بارچہ لری مستقیم فرض اولسه بیلان بر منحنی ایله احاطه  
اولندیقی حالده دخی جاریدر .

مثال : ر نصف قطر ندہ و مرکز ندن ۶ بعد ندہ بولنان بر محور اطرا .  
فدہ دور ایدن بر دائرہ نک سمیت شکندہ تولید ایلدیکی جسمک مساحت  
حجمیه سی

$$\epsilon \pi^2 r^2 =$$

وسطح خارجیسی

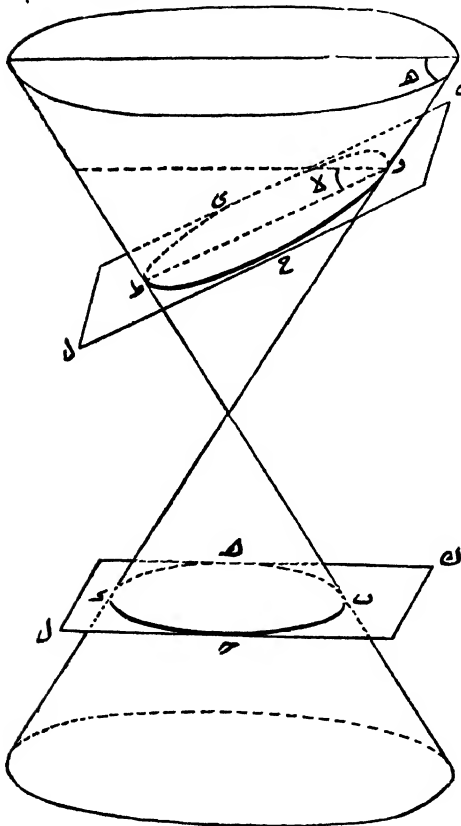
$$\epsilon \pi^2 r^2 = \text{اولور} .$$

# بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

قطر مخروطیات و مدارات

( ٤٥ § )

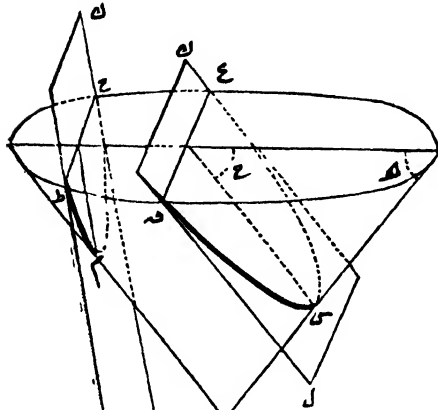
بر مخروط دورانی ایله بونک رأساً مقابلنی [ متناظرینی ] تصور ایده لم :



(شکل-٦١)

( شکل — ٦١ ) محورینه عمود  
و تعبیر دیگر له قاعده مخروطه موازی  
اوله ورق مخروطی قطع ایتمک اوزره  
رسم ای دیلن بر (ك) مستویسنک  
سطح مستدیر مخروط ایله ذیل  
مشتکی [ ب ح د ه مقطعی ] بر محیط  
دائرة اولدینی آشکاردره. مستوی  
مذکور قاعده مخروطه موازی  
اولیوبده مائل بر وضعیتده  
اولسه میل زاویه سنک مقدارینه  
کوره سطح مستدیر مخروط  
اوزرنده اوچ مختلف منحنی  
تولد ایدر . شویله که اگر  
مستوی سنک قاعده مخروط ایله  
تشکیل ایلدیکی مستویین زاویه-  
سنک مقیاس زاویه سی مولد  
مخروطک قاعده مذکوره  
نظراً اولان میل زاویه سندن

( شکل - ۶۱ ) کچوک [  $\hat{A} > \hat{A}'$  ] اولورسه «قطع ناقص» نامی  
تختده و ح ط ی مثللو قبالی واکر (شکل - ۶۲) بیوک [  $\hat{A} < \hat{A}'$  ] اولورسه  
مستوی هر ایکی مخروطی قطع ابتدیکندن هر بری آجیق اولق اوزره  
ح ط ی، ح م ط مثللو «قطع زائد»

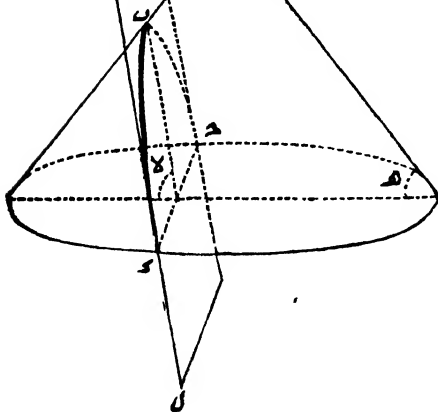


ناميله ایکی قوللی واکر چه مساوی  
[  $\hat{A} = \hat{A}'$  ] اولورسه کذلک آجیق  
و «قطع مکافی» دینلن «س ع  
مثللو بالکتر بر قوللی منحنیلر  
وجوده کلبر که خواص مخصوصه  
سه سنه کوره هر بری بوجه  
آتی تعریف و بیان اولنور.

— قطع ناقص —

( ۴۶ §

تعریفات

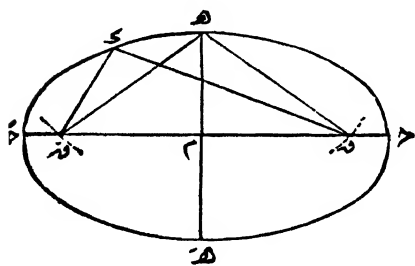


( شکل - ۶۲ )

(۱) هر نقطه سنک، داخلنده  
واقع ایکی نقطه ثابتیه اولان  
بعدلری مجموعی بر مقدار ثابتدن  
عبارت اولان منحنیه «قطع  
ناقص» تسمیه اولنور.

(۲) : (شکل - ۶۳) مذکور ایکی نقطه ثابتیه [و، و] د نقطه احتراق، ه بعد ثابتیه [ج، ج] د محور کبیر، و محور کبیر م منتصف نقطه سندن کچن ه ه قسم مستقیمه د محور صغیر، م نقطه سینه قطع ناقص مرکزی، و و قسم مستقیمه د نقطه احتراق ربعدی؛ ج، ج، ه، ه نقطه لرینه د قطع ناقصک رأسلری، دنیلور.

(۳) : منحنی اوزرنده واقع هر قننی بر نقطه نك نقطه احتراق لر اولان (و، و، و) بمدلری نقطه مذکوره نك شعاعلری، نافی آلیرلر.



(شکل - ۶۳)

تنبیه : شکلک مطالعه سندن و قطع ناقصک تعریفدن ه، ه رأسلرینک شعاعلری یکدیگرینه و بناء علیه هر بری محور کبیرک نصفه و (ج، ج) رأسلرینک شعاعلری یابنده کی فضلک دخی نقطه احتراق لر بعدینه مساوی اولدینی اکلایشیلور.

مسئله : ه ه محور صغیری ایله ج، ج محور کبیری معلوم اولان بر قطع ناقصک نقطه احتراق لرینی بولق مطلوبدر.

صورت حلّی : اولاً یکدیگرینه عمود اولق اوزره ه ه ایله ج، ج مستقیملری رسم؛ ثانیاً م ه = ج ه، م ج = ج ج قطع اولنور. ثالثاً ه نقطه سی مرکز اوله رق (م، م). مساوی اولان ه و نصف قطر یله چیزیلان قوسک ج، ج محور کبیرینی قطع ایلدیکی و، و نقطه لری بولنور.

تنبیه سابقه عطفاً اشبو ایکی نقطه‌نک مطلوب اولان نقطه احتراقلردن عبارت اولدینی محتاج ایضاح دکلدر .

( § ۴۷ )

### — قطع ناقصک ترسیمی —

(۱) : قطع ناقصک تمریفنه نظراً (شکل — ۶۳) وه، وه نقطه احتراقلریله قطع ناقصک محیطی اوزرنده بولان هر قننی بر ۷ نقطه‌سی بیننده‌کی بعدلر مجموعی [ وه + وه ] دائماً ثابت اولان ۶۶ محور کیرینه مساوی اولدیغندن وه، وه نقطه احتراقلرینه ایکی طوللو ایکنه دیکرک بو ایکنه‌لره محور کیرک طولنه مساوی بر ایبلکک اوجلری باغلانور و بده گوشک بر حالده طوران اشبو ایبلکک بر قورشون قلم و یا ایجه بر چیوی طاقیله‌رق کریلور و قلم و یا چیوی ایبلکک دائماً مماس قالمق و اوجی خفیفجه کاغده طوقونمق اوزره ایکنه‌لر اطرافده دور ایتدیریلرک بر منحنی چیزیلورسه مطلوب اولان قطع ناقص وجوده کلش اولور .

تنبیه : ارض اوزرنده قطع ناقص رسم ایتک ایچون ایکنه یرینه قازیق و ایبلک یرینه ایپ و قورشون قلم یرینه ده بیوک بر چیوی قوللانیلور .  
(۲) : محور صغیری ایله محور کیرری معلوم اولان بر قطع ناقصی نقطه بنقطه ترسیم ایتک ایچون { مسئله (۱) } استناداً تعیین اولسان وه، وه نقطه احتراقلری مرکز اولق اوزره مجموعلری محور کیرک طولنه مساوی اولان مختلف نصف قطرلره متعدد قوسلر رسم ایدیلور و قوسلرک تلاقی نقطه‌لری ینلری وصل اولنور .

تنبیه : قطع ناقصک شکلی محورلرینه تابع اولوب ایکی محور بیننده‌کی فضل تقدیر بیوک اولورسه قطع ناقصک شکلی دخی اونستده طولانی اولور .

فضل قدر كچوك اولورسه شكل مذکور، دائره يه ياقلا شور واشبو فضلک صفره  
منجر اولسي حانده قطع ناقص دائره يه منقلب اولور. [\*]

— قطع زائد —

( ٤٨ §

اشبو منحنی نادراً استعمال اولندي کي مفصلاً مباحث رياضية عاليه ده  
کوريله جکندن بوراده ذکرندن صرف نظر اولمشدر .

— قطع مکافي —

( ٤٩ §

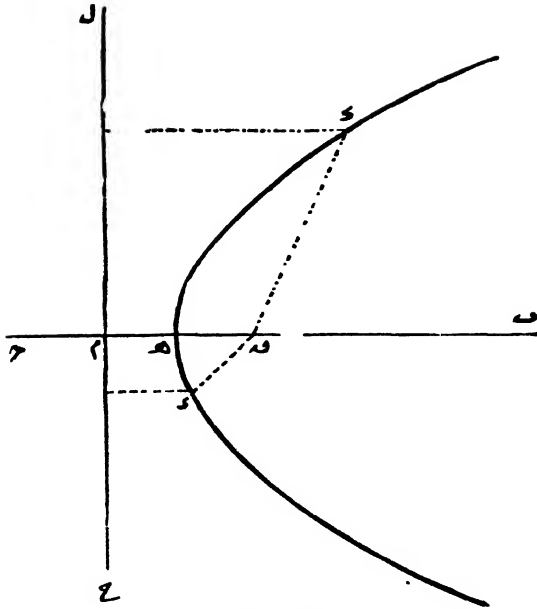
— تعريفات —

( شکل — ٦٤ ) اوزرنده واقع هر بر (و) نقطه سی بر (و) نقطه ثابتی  
ایله بر (م ل) مستقیم ثابتدن ابعاد متساویه ده بولان منحنی به «قطع مکافي» ؛  
مذکور نقطه ثابتیه «نقطه احتراق» ؛ مستقیم ثابتیه «محور مربی» ؛ ه نقطه سینه  
«قطع مکافینک رأسی» و (و) نقطه سندن کچوب محور مربی به عمود  
اولان و ه م مستقیمه «قطع مکافینک محوری» دنیلور .

---

[\*] ٧ نصف محور صغیرک طولی، ب نصف محور کبیرک طولی اولدیفته نظراً  
قطع ناقصک مساحة سطحیه سی = πب ٧ اولدینی مباحث ریاضیه عالیه ده کوريله جکدر .





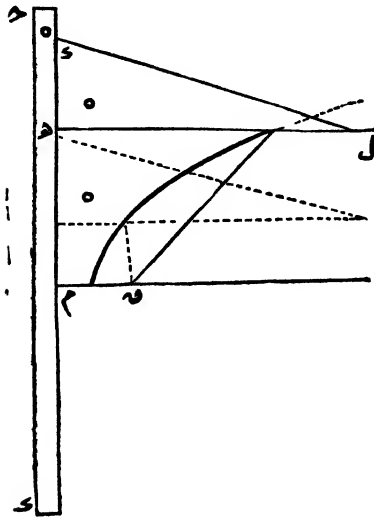
شکل ۶۴

( ۵۰ §

— قطع مكافئك ترسيمى —

(۱) : جدول و كونه واسطه سيله قطع مكافئى رسم ايتك ايجون (شکل — ۶۵) اولاً — م و محور مريسنه و ۷ جدول تحتسى و بوكا عموداً ل ه و كونه سى تطبيق اولنور. ثانياً — كونه نك ل ه ضلع قائمه مساوى بر طولده النان بر ايبلكك بر اوجى و ه نقطه احتراقه ديكلن بر طولوايكنه و ديكر اوجى كونه نك ل و أسنه ربط اولنور. ثالثاً — ايبلك بر قورشون قلمى

اوجيله كريلمك و اشبو اوج دائماً كونهك ل ه كنارينه تماس ايلمك  
اوزره كونه يوقارى به طوغرى تحريك ايديلور. ايسته قلم اوجنك رسم



شكل ۶۵

ايديلكى منحنى مطلوب اولان  
منحنينك نصفندن عبارت اولوب  
عيني عمليات اشاغى به طوغرى  
اجرا ايديلورسه منحنينك نصف  
ديكرى دخى تشكيل ايدلش اولور.

(۲): قطع مكافينك نقطه بنقطه

ترسيمى ايجون (شكل — ۶۶)

اولاً — يكديكرينه عمود م، م ط

مستقيملى رسم اولنوب م م

محور و (م ط) محور مربى اعتبار

اولنور. ثانياً — ه نقطه احترا

قندن محور مربى بن قطع ايتك

اوزره متعدد و، ه، و، الخ مستقيملى چيزيلور. ثالثاً — اشبو

مستقيملىرك عمود ناصفلىله و، ه، ۷، الخ . نقطه لرندن محوره موازاتاً

رسم ايديلن مستقيملىرك ل، ه، س... الخ تلاقى نقطه لرى تعيين اولنور.

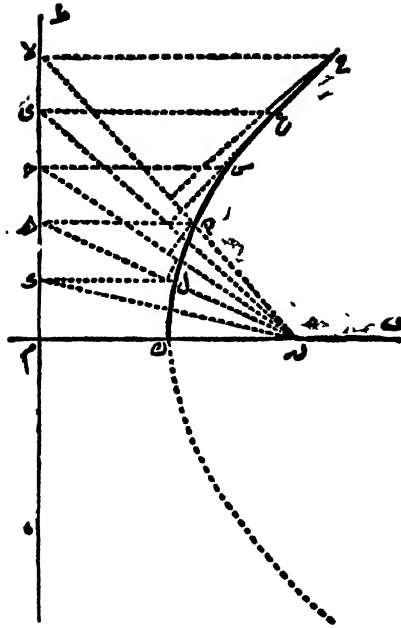
ايسته بو وجهله بولان نقطه لر متسلسلاً يكديكرينه وصل و ربط اولنورسه

قطع مكافى منحنيسى تولد ايدر.

تنبیه : ك، ل، ه، س... نقطه لرى ه نقطه سندن كچرك محور

مربى به تماس اولان محيط دائرلىرك مركزلرندن عبارت اولدنى بدى

اولدبندن قطع مكافى منحنيسى بو نقطه ثابتدن كچن و دائماً بر مستقيم نايته تماس



شکل ۶۶

اولان محیط دائره لرك مركز لر ينك محل هندسي دخی ديمك اوله جني  
اکلا شيلهش اولور . [°]

— حلزون —

§ (۵۱)

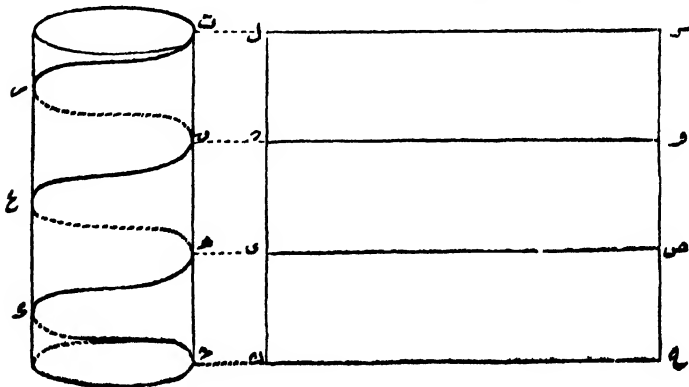
— تعريفات —

(شکل — ۶۷) هر قني براسطوانه دوراييه ، برمودی استقامتده

[°] محور مربعيه موازی اولان مستقيم ايله قطع ، کافي منحیسی آره سنده  
بولنان سطحك مساحه سی منجی . مذکور اوزرنده هر سوم مستطيك مساحه سنك ايكي  
ثلثه مساوی اولدینی مباحث ریاضیه عالیه ده کوريله جکدر .

بعد الانکشاف { § ۳۱ }، تنبیه { س ل ح ک } شکل مستطینی اخذایده جکندن ل ک مولدی اقسام متساویه به تقسیم اولوبده تقسیمات نقطه لریدن ل س مستقیمه موازی ه و ی ص مستقیماری رسم و (س ه، و ی، ص ک) قطرلری وصل اولنور و مستطیل مذکور تکرار اسطوانه بی تشکیل ایتک اوزره صاریلورسه قطرلر اسطوانه نك سطح مستدیری اوزرنده ت س ر و ع ه و غ منحنی غیر منقطعی تشکیل ایدرلر . ایشته بو وجهله شکل ایدن منحنی به ه حلزون ، تسمیه اولنور .

برنجی (ه س) قطرینک تشکیل ایتدیکی حلزونک برنجی قسمه [ت س ر و] «دوره حلزون» دینلور . ایکنجی (و ی) قطری برنجی دوره به مربوط و ع ه دوره حلزونی و اوچنجی (ص ک) قطری ایکنجی دوره به متصل اولان ه و غ . الخ . دوره حلزونی تشکیل ایدر . ایکی دوره حلزون بیننده بولان اسطوانه پارچه سی غیر متحول اولوب ایکی حلزون آره سنده بولان مولد قسمه «خطوة حلزون» تعبیر اولنور . بو صورته ت ق قسم مستقیمی برخطوة حلزونی اراهه ایدر .



شکل ۶۷

توضیحات: صمدانیه ایله بتدی



هندسه مجسمه مندرجاتك درسره صورت تقسیمى

مشعر جدولدر

درس	درس
§ ۲۳ و ۲۲ و ۲۳ (۱)	§ ۱ (۱)
§ ۲۴ و ۲۳ (ب)	§ ۲ و ۳ (۳)
§ ۲۵ و ۲۳ (۷)	§ ۳ و ۴ (۱، ۷)
§ ۲۶ و ۲۳ (۷)	§ ۴ و ۸ (۱۰)
§ ۲۷ و ۲۳ (۷)	§ ۵ و ۱۱ دن (۱) : (۹)
§ ۲۸ و ۲۳ (۷)	§ ۶ و ۱۱ دن (۱۰) : (۱۵)
§ ۲۹ و ۲۳ (۷)	§ ۷ و ۱۲ (۱۲)
§ ۳۰ و ۲۴ (۲۴)	§ ۸ و ۱۲ (۱، ۱۲)
§ ۳۱ و ۲۵ و ۲۵ (۱۰)	§ ۹ و ۱۲ (۱، ۱۲)
§ ۳۲ و ۲۵ (ب)	§ ۱۰ و ۱۲ (۱، ۱۲)
§ ۳۳ و ۲۵ (۷)	§ ۱۱ و ۱۳ (۱۴)
§ ۳۴ و ۲۵ (۷)	§ ۱۲ و ۱۵ (۱۶)
§ ۳۵ و ۲۵ (۷)	§ ۱۳ و ۱۷ (۱۷)
§ ۳۶ و ۲۶ و ۲۷ (۲۷)	§ ۱۴ و ۱۷ (۱، ۱۷)
§ ۳۷ و ۲۸ و ۲۸ و ۲۹ (۲۹)	§ ۱۵ و ۱۷ (۱، ۱۷)
§ ۳۸ و ۳۰ (۱، ۳۰)	§ ۱۶ و ۱۸ دن (۱) : (۴)
§ ۳۹ و ۳۰ (ب)	§ ۱۷ و ۱۸ دن (۵) : (۱۱)
§ ۴۰ و ۳۰ (ب)	§ ۱۸ و ۲۰ (۱، ۲۰)
§ ۴۱ و ۳۰ (ب)	§ ۱۹ و ۲۰ (۱، ۲۰)
§ ۴۲ و ۳۱ (۳۱)	§ ۲۱ و ۲۱ و ۲۱ دن (۱) و (۲)
§ ۴۳ و ۳۱ (۱، ۳۱)	§ ۲۲ و ۲۱ دن (۳) و (۴)
§ ۴۴ و ۳۱ (۱، ۳۱)	
§ ۴۵ و ۳۱ (۱، ۳۱)	

درس	درس
٦٠ § ٣٦، ٣٧، ٣٧ (١)	٤٦ {
٦١ § ٣٨، ٣٩، ٤٠	٤٧ { (ب. ٣١)
٦٢ § ٤٢	٤٨
٦٣ {	٤٩ § ٣٢، ٣٣
٦٤ { ١. ٤٢ ا و ب)	٥٠ { (١. ٣٣)
٦٥ {	٥١ {
٦٦ § ٤٥، ٤٦	٥٢ {
٦٧ § ٤٧	٥٣ { (ب. ٣٣)
٦٨ § ٤٩، ٥٠، ٥١	٥٤ {
— ❦ —	٥٥ § ٣٤، ٣٤ (١)
تنبیه : § ١٩ و § ٢٠ و § ٣٠ ایله	٥٦ § ٣٤ (ب. دن (١) : (١٠)
§ ٤١ غیر مجبوریدز .	٥٧ § ٣٤ (ب. دن (١١)
	٥٨ § ٣٤ (ب. دن (١٢) : (١٧)
	٥٩ § ٣٥

# خطا و صواب جدولی

صواب	خطا	صفحہ - طر	
ب = و	ب = و (آشاغیدن)	۹	۱۰
تعریف	تعریف (یوقاریدن)	۸	۱۱
مستقیم	مستقیم	۶	۱۲
م	م (آشاغیدن)	۶	۱۳
ب    و = و	ب    و = و (یوقاریدن)	۴	۱۷
ی ح ..... ۱	ی ح ..... (آشاغیدن)	۳	۳۶
ع	ع	۷	} ۴۲
بالتطبیق	بالتطبیق	۹	
متوازی المستطيلات	متوازی المستطيلات (یوقاریدن)	۳	۴۵
(۱۰۲۳ §)	(۱۰۱۳ §) (آشاغیدن)	۳	۴۶
و = و	و = و (یوقاریدن)	۲	} ۴۹
ج وین (شکل - ۳۱) - و =	ج وین (شکل - ۳۱) - و =	۳	
ب = ب	ب = ب	۴	
ب = ب	ب = ب	۵	
ق = ق	ق = ق	۵	۵۰
<p>۵۱ (۳۴) نجی شکلده { (ق) اهرام ناقصی ..... کے ایلہ کو ستریلہ جکدر (ک ک) د ... کے }</p>			
ارتفاعی ع = ۱۰ سم	قاعدہ سی ع = ۱۰ سم (یوقاریدن)	۶	۵۲
م ۵۲,۵	م ۵۲,۵	۵	۵۳
د ۲	د ۲	۵	۵۴



صواب	خطا	صحیفہ سطر
قطر قائمی	قطر صغیری (یوقاریدن)	۱ ۵۶
$\frac{\overline{۶۲}}{\overline{۶۲}} = \frac{\overline{۶۲}}{\overline{۶۲}}$	$= \frac{\overline{۶۲}}{\overline{۶۲}}$ (آشاغیدن)	۱ ۵۷
$\frac{\overline{۶۲}}{\overline{۶۲}} =$	$\frac{\overline{۶۲}}{\overline{۶۲}} =$ (یوقاریدن)	۱ ۵۸
	۶۲	۵۹ (۳۷) نجی شکله قاعده نك اوچنجی رأسی (۶) حرفیله کوستریله جکدر.
مستویلریله	مستویلریله (یوقاریدن)	۵ } ۶۰
$\frac{ع \cdot ۰}{ع \cdot ۰}$	$= \frac{ع \cdot ۰}{ع \cdot ۰}$ (آشاغیدن)	۲ }
$\frac{\overline{۲}}{\overline{۲}} = \frac{\overline{۲}}{\overline{۲}}$	$\frac{\overline{۲}}{\overline{۲}} = \frac{\overline{۲}}{\overline{۲}}$ (یوقاریدن)	۱ ۶۹
تختانیسی ۲	تختانیسی ۲	۲ ۷۱
$\frac{۱}{۴} و \frac{۱}{۸} + ع$	$\frac{۱}{۴} و \frac{۱}{۴} + ع$	۳ ۷۴
$\frac{۱}{۶} (ع + ۰)$	$\frac{۱}{۶} (ع + ۰)$ (آشاغیدن)	۴ ۷۵
$\frac{۲}{۹} و ع$	$\frac{۲}{۹} و ع$	۲ } ۷۶
$\frac{۲}{۶} ع$	$\frac{۲}{۶} ح$	۳ }
قاعدیتنك	قاعدیتك (یوقاریدن)	۳ } ۷۷
بولان براهرام ناقصك	بولان بر اهرامك	۸ }
	(شکل ۴۴) ده قاعده نك دردنجی رأسی ط ایله کوستریله جکدر .	۷۸
طر	ط ع (آشاغیدن)	۵ ۷۸
ایکی قاعده لوندن	ایکی قاعده لوندن (یوقاریدن)	۲ ۸۲
$\frac{۱}{۳} ع \cdot ۰$	$\frac{۱}{۳} ع \cdot ۰$ (آشاغیدن)	۱ ۸۶
مخروطکدر	مخروط	۲ ۸۹
۸۰، ۸۰ م	۸۰، ۸۰ م (یوقاریدن)	۷ ۹۱





